HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng A

Bài A.1. Cho $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác đinh bởi các điều kiện

$$u_1 = a,\ u_{n+1} = {u_n}^2 - u_n + 1 \quad \forall n \geq 1.$$

1. Tìm tất cả các giá trị thực của a để dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.
2. Tìm giới hạn của dãy số đó khi nó hội tụ.

Bài A.2. Phần nguyên của số thực x được định nghĩa là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, và được kí hiệu là $[x]$. Hiệu $x - [x]$ được gọi là phần lẻ của x, và được kí hiệu là $\{x\}$.

Giả sử a, b là các số thực dương và n là số tự nhiên. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} (a\{nb\} + b\{na\}) = 0$$

khi và chỉ khi a và b là các số nguyên.

Bài A.3. Cho $a \geq 1$ là một số thực và $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

- $(f(ax))^2 \leq a^3x^2 f(x)$ với mọi số thực x;
- f bị chặn trên trong một lân cận nào đó của 0.

Chứng minh rằng $|f(x)| \leq \dfrac{x^2}{a}$ với mọi số thực x.

Bài A.4. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi vô hạn lần và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

$$f(0)f'(0) \geq 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

1. Chứng minh rằng tồn tại một dãy số $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tăng ngặt và không âm sao cho
$$f^{(n)}(x_n) = 0$$
với mọi số nguyên dương n (trong đó, $f^{(n)}$ kí hiệu đạo hàm cấp n của f).
2. Tồn tại hay không một hàm số f thỏa mãn mọi yêu cầu của đề bài và không đồng nhất bằng 0?

Bài A.5. Với mỗi số thực $0 < \alpha \neq 1$, gọi f_α là hàm số được xác định trên khoảng $(1, \infty)$ bởi công thức

$$f_\alpha(x) = \int_x^{x^\alpha} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \quad (\forall x > 1).$$

1. Chứng minh rằng f_α là một phép đồng phôi, tức là một song ánh liên tục, từ khoảng $(1, \infty)$ lên một khoảng $I_\alpha \subset \mathbb{R}$ nào đó sao cho ánh xạ ngược $f_\alpha^{-1} : I_\alpha \to (1, \infty)$ cũng liên tục.
2. Tìm I_α.

HẾT

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*