HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016

ĐÁP ÁN MÔN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng B

Bài B.1.

(i) Đáp số $a^4 - b^4$.

(ii) Sử dụng công thức Cramer,

$$A^{-1} = (b^4 - a^4)^{-1} \begin{pmatrix} a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 \\ b^3 & a^3 & a^2b & ab^2 \\ ab^2 & b^3 & a^3 & a^2b \\ a^2b & ab^2 & b^3 & a^3 \end{pmatrix}.$$

(iii) Ký hiệu y_0 là số cây ban đầu công ty quản lý. Ký hiệu y_1, y_2, y_3, y_4 là số cây tương ứng của công ty ở cuối các tháng thứ $1, 2, 3, 4$. Từ giả thiết chúng ta có:

$$y_1 = 0,9y_0 + 100$$

hay là

$$10y_1 - 9y_0 = 1000.$$

Phân tích tương tự ta nhận được

$$10y_2 - 9y_1 = 1.020;\ 10y_3 - 9y_2 = 1.040;\ 10y_4 - 9y_3 = 1.060.$$

Kết hợp với $y_4 = y_0 + 80$ thì phương trình cuối cùng ở trên viết lại được là

$$10y_0 - 9y_3 = 260$$

Vậy ta có hệ phương trình tuyến tính với ma trận cho bởi

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 10 \\ 10 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.020 \\ 1.040 \\ 260 \end{pmatrix}$$

Sử dụng công thức tính ma trận A^{-1} ở câu trên ta tính được

$$y_0 = \frac{729 * 1.000 + 810 * 1.020 + 900 * 1.040 + 1000 * 260}{19 * 181} = 800.$$

Vậy $y_4 = 880$.

Bài B.2.

(i) Dễ thấy ánh xạ D biến hàm hằng vào 0 và ánh xạ T biến một đa thức bất kỳ vào đa thức thức có nghiệm tại 0. Vậy D không là đơn ánh còn T không là toàn ánh.

(ii) Ta có

$$(D \circ T - T \circ D)(p(x)) = D(xp(x)) - xD(p(x)) = p(x) + xp'(x) - xp'(x) = p(x),$$

với mọi $p(x)$.

Vậy ánh xạ $D \circ T - T \circ D$ là song ánh.

Bài B.3.

(i) Ma trận theo cơ sở đã cho là

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & C_n^0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) Có thể suy ra trực tiếp từ ý (i) (ma trận nhận được là ma trận đường chéo trên chặt).

Cũng có thể sự dụng nhận xét: ánh xạ Φ làm giảm bậc đa thức, từ đó $\Phi^{n+1} = 0$.

(iii) Nhận xét rằng toán tử này giảm bậc của mỗi đa thức khác hằng đi 1 đơn vị. Vậy có thể chọn cơ sở dạng $e_1 = p(x)$ - đa thức bậc n, $e_i = \Phi^{i-1} e_1$.

Có thể chỉ ra ví dụ cụ thể cho cơ sở hoặc chứng minh nhận định trên (xem câu sau).

(iv) Do p là một đa thức, điều kiện $p(a+1) + p(a-1) = 2p(a)$ đúng với mọi a nguyên tương đương với $p(x+1) + p(x-1) = 2p(x)$. Dễ thấy điều kiện này lại tương đương với $p(x) \in \ker \Phi^2$. Sử dụng cơ sở đã cho ở câu (ii) (thậm chí nếu tinh ý có thể sử dụng ma trận tìm được ở câu (i)), ta thấy rằng $\ker \Phi^2$ chính là không gian sinh bởi 2 vectơ đầu tiên, nói cách khác, là các đa thức có bậc ≤ 1.

Cách khác dựa vào lập luận về hạng: dựa vào ma trận đã cho trong (i), ta dễ dàng thấy Φ^2 là một ánh xạ có hạng bằng $n-2$. Từ đó suy ra $\ker\Phi$ có hạng bằng 2. Nhưng hiển nhiên không gian các đa thức bậc ≤ 1 nằm trong $\ker\Phi$. Từ đó có điều cần chứng minh.

Nhận xét. Ta cũng có thể lập luận một cách giải tích như sau: bởi vì p là một đa thức điều kiện $p(a+1)+p(a-1)=2p(a)$, mà ta viết lại thành $p(a)=\frac{1}{2}(p(a+1)+p(a-1))$, đúng với mọi a tương đương với $p(\alpha)=\frac{1}{2}(p(\alpha+\beta)+p(\alpha-\beta))$ $(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R})$. Như vậy p là một hàm số vừa lồi vừa lõm. Điều này chỉ có thể xảy ra khi đồ thị p là một đường thẳng, nói cách khác, khi p là một đa thức bậc ≤ 1!

Bài B.4.

Xét một hình vuông có diện tích S. Cạnh hình vuông có độ dài là $c=\sqrt{S}$. Khi đó một cạnh hình vuông là cạnh huyền của một tam giác vuông mà hai cạnh góc vuông còn lại là một đường thẳng đứng và một đường ngang. Khi đó $c^2=a^2+b^2$ với $a,b\geq 0$ là hai số nguyên, tương ứng với độ dài hai cạnh tam giác vuông đó. Do đó $S=a^2+b^2$.

(i) $S=4$: suy ra $a=2, b=0$ hoặc $a=0, b=2$. Do đó hình vuông có hai cạnh song song với các đường dọc và ngang. Nói riêng, mỗi hình vuông ứng với hai đoạn độ dài 2 trên cột dọc và ngang. Số đoạn như vậy trên một cột ngang hoặc dọc là $16-2=14$. Số hình vuông diện tích 4 do đó là $N_4=14^2=196$.

(ii) $S=25$: Ta có $25=0+5^2=3^2+4^2$. Do đó xảy ra hai trường hợp

$$\begin{cases} a=0, b=5 \text{ hoặc } a=5, b=0; \\ a=3, b=4 \text{ hoặc } a=4, b=3. \end{cases}$$

Trường hợp thứ nhất, lập luận tương tự như trên suy ra có tất cả $A=(16-5)^2=121$ hình vuông có các cạnh độ dài 5 và song song với các trục dọc, ngang.

Trường hợp thứ hai, do tính đối xứng nên số hình vuông là $B=2C$ với C là số hình vuông ứng với trường hợp $a=3, b=4$. Một hình vuông như vậy ứng với hai đoạn có độ dài 7 trên các trục dọc và ngang. Số hình như vậy do đó là

$$C=(16-7)^2=81.$$

Do đó số hình vuông có diện tích 25 trong trường hợp $(a,b)=(3,4)$ hoặc $(4,3)$ là

$$B=2.81=162.$$

Vậy tổng số hình vuông có diện tích 25 là $S_{25}=A+B=283$.