HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016**

ĐÁP ÁN MÔN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng A

Bài A.1.

(i) Đáp số $a^4 - b^4$.

(ii) Sử dụng công thức Cramer,

$$A^{-1} = (b^4 - a^4)^{-1} \begin{pmatrix} a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 \\ b^3 & a^3 & a^2b & ab^2 \\ ab^2 & b^3 & a^3 & a^2b \\ a^2b & ab^2 & b^3 & a^3 \end{pmatrix}.$$

Ký hiệu y_0 là số cây ban đầu công ty quản lý. Ký hiệu y_1, y_2, y_3, y_4 là số cây tương ứng của công ty ở cuối các tháng thứ $1, 2, 3, 4$. Từ giả thiết chúng ta có:

$$y_1 = 0,9y_0 + 100$$

hay là

$$10y_1 - 9y_0 = 1000.$$

Phân tích tương tự ta nhận được

$$10y_2 - 9y_1 = 1.020;\ 10y_3 - 9y_2 = 1.040;\ 10y_4 - 9y_3 = 1.060.$$

Kết hợp với $y_4 = y_0 + 80$ thì phương trình cuối cùng ở trên viết lại được là

$$10y_0 - 9y_3 = 260$$

Vậy ta có hệ phương trình tuyến tính với ma trận cho bởi

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 10 \\ 10 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.020 \\ 1.040 \\ 260 \end{pmatrix}$$

Sử dụng công thức tính ma trận A^{-1} ở câu trên ta tính được

$$y_0 = \frac{729 * 1.000 + 810 * 1.020 + 900 * 1.040 + 1000 * 260}{19 * 181} = 800.$$

Vậy $y_4 = 880$.

Bài A.2.

(i) Ma trận theo cơ sở đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & C_{n-1}^{0} \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & C_{n-1}^{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

(ii) đa thức đặc trưng của Φ có dạng

$$T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_0$$

Theo định lý Cayley-Halmilton,

$$\Phi^n + a_{n-1}\Phi^{n-1} + \ldots + a_0\mathrm{Id} = 0.$$

Nhưng đẳng thức này chính xác nói rằng với mọi $p \in V$ thì

$$p(x+n) + a_{n-1}p(x+n-1) + \cdots + a_0 p(x) = 0.$$

Bài A.3.

(i) $n = 2$: $P_2(x) = 2x^2 - x - 1$ có hai nghiệm thực $x = 1$ và $x = -1/2$.
$n = 3$: $P_3(x) = 3x^3 - x^2 - x - 1 = (x-1)(3x^2 + 2x + 1)$. Từ đó ta thấy, $P_3(x)$ chỉ có duy nhất nghiệm $x = 1$.

(ii) $P_n(x) = (x-1)(nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 2x + 1)$. Ta sẽ chứng minh đa thức

$$Q(x) := nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 2x + 1$$

có duy nhất một nghiệm thực $x = a < 0$ nếu n chẵn và không có nghiệm thực nếu n lẻ.

Nhận xét, $Q(x) = R'(x)$, trong đó

$$R(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + 1 = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Vậy

$$Q(x) = R'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

Khảo sát đa thức ở tử số: $S(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ ta thấy.

Nếu n lẻ ta thấy $S(x) \geq 0$ với mọi x, dấu bằng xảy ra chỉ khi $x = 1$ (dùng BĐT Cauchy). Tuy nhiên $Q(1) \neq 1$, vậy $Q(x)$ không có nghiệm thực.

Nếu n chẵn, khảo sát hàm số ta thấy $S(x)$ có hai nghiệm, một nghiệm $x = 1$ và một nghiệm $x = a < 0$. Vậy $Q(x)$ có duy nhất nghiệm $x = a < 0$.

Bài A.4.

Xét một hình vuông có diện tích S. Cạnh hình vuông có độ dài là $c = \sqrt{S}$. Khi đó một cạnh hình vuông là cạnh huyền của một tam giác vuông mà hai cạnh góc vuông còn lại là một đường thẳng đứng và một đường ngang. Khi đó $c^2 = a^2 + b^2$ với $a, b \geq 0$ là hai số nguyên, tương ứng với độ dài hai cạnh tam giác vuông đó. Do đó $S = a^2 + b^2$.

(i) $S = 4$: suy ra $a = 2, b = 0$ hoặc $a = 0, b = 2$. Do đó hình vuông có hai cạnh song song với các đường dọc và ngang. Nói riêng, mỗi hình vuông ứng với hai đoạn độ dài 2 trên cột dọc và ngang. Số đoạn như vậy trên một cột ngang hoặc dọc là $16 - 2 = 14$. Số hình vuông diện tích 4 do đó là $N_4 = 14^2 = 196$.

(ii) $S = 25$: Ta có $25 = 0 + 5^2 = 3^2 + 4^2$. Do đó xảy ra hai trường hợp

$$\begin{cases} a = 0, b = 5 \text{ hoặc } a = 5, b = 0; \\ a = 3, b = 4 \text{ hoặc } a = 4, b = 3. \end{cases}$$

Trường hợp thứ nhất, lập luận tương tự như trên suy ra có tất cả $A = (16 - 5)^2 = 121$ hình vuông có các cạnh độ dài 5 và song song với các trục dọc, ngang.

Trường hợp thứ hai, do tính đối xứng nên số hình vuông là $B = 2C$ với C là số hình vuông ứng với trường hợp $a = 3, b = 4$. Một hình vuông như vậy ứng với hai đoạn có độ dài 7 trên các trục dọc và ngang. Số hình như vậy do đó là

$$C = (16 - 7)^2 = 81.$$

Do đó số hình vuông có diện tích 25 trong trường hợp $(a, b) = (3, 4)$ hoặc $(4, 3)$ là

$$B = 2.81 = 162.$$

Vậy tổng số hình vuông có diện tích 25 là $S_{25} = A + B = 283$.