



ĐỀ THI MÔN: SỐ HỌC
Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng PT

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong chứng minh của câu sau. Nếu một câu được chứng minh không dựa vào kết quả của các câu trước thì có thể dùng để chứng minh các câu trước.

Phương trình Markov

Nhắc lại rằng phương trình nghiệm nguyên

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

được gọi là phương trình Markov. Mỗi nghiệm nguyên dương $(x, y, z) = (a, b, c)$ của nó được gọi là một bộ Markov. Các số a, b, c được gọi là các thành phần của bộ đó.

A. Phương trình nghiệm nguyên Markov và cây Markov

Bài PT.1. Chứng minh rằng các bộ Markov có hai thành phần bằng nhau chỉ có thể là $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$ và các hoán vị của chúng.

Bài PT.2. Giả sử (a, b, c) là một bộ Markov. Chứng minh rằng $3bc - a, 3ac - b, 3ab - c$ là các số nguyên dương và $(3bc - a, b, c), (a, 3ac - b, c), (a, b, 3ab - c)$ cũng là các bộ Markov.

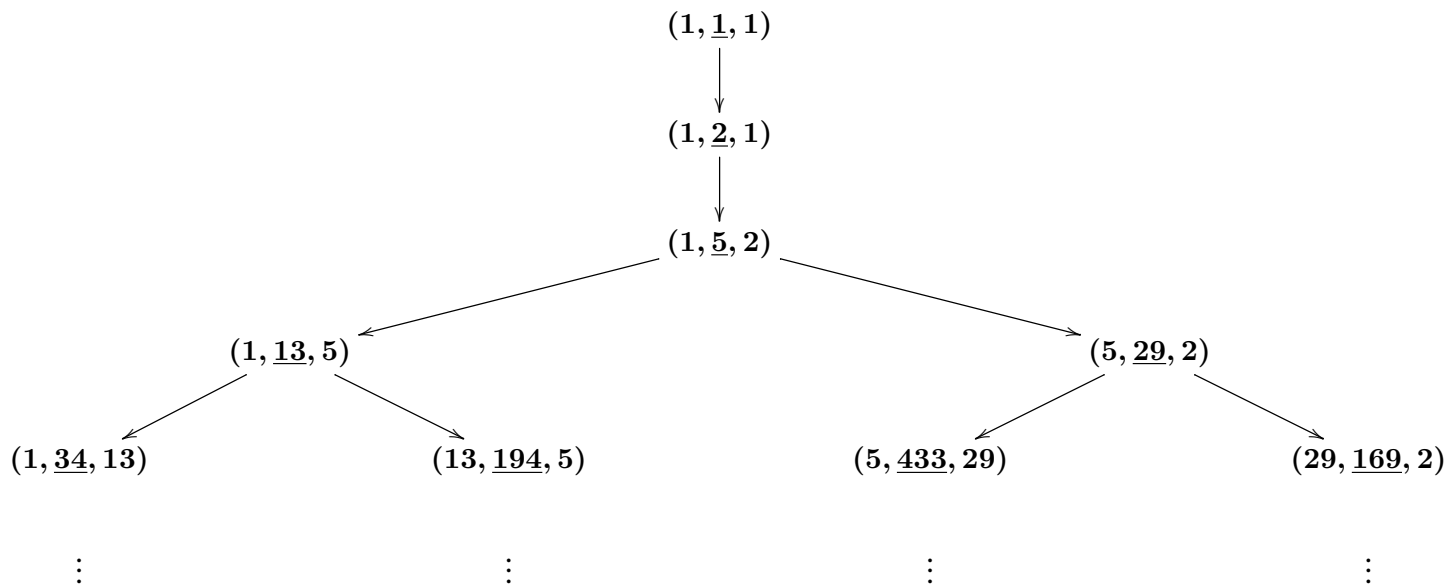
Bài PT.3. Giả sử (a, b, c) là một bộ Markov mà $a > b > c$. Chứng minh rằng $3ac - b > a, 3ab - c > a$ nhưng $a > 3bc - a$.

Để thuận tiện, ta viết các bộ Markov với thành phần lớn nhất nằm ở giữa và gạch chân nó để nhấn mạnh. Như vậy, ta sẽ viết (t, \underline{m}, p) cho một bộ Markov (t, m, p) mà $m \geq t, m \geq p$. Ta xây dựng **cây Markov** bằng truy hồi như sau:

- ta viết bộ $(1, \underline{1}, 1)$ ở dòng đầu tiên, bộ $(1, \underline{2}, 1)$ ở dòng thứ hai, bộ $(1, \underline{5}, 2)$ ở dòng thứ ba;

- tuần tự từ trái sang phải, ứng với mỗi bộ ba Markov (t, \underline{m}, p) đã có ở dòng thứ n (với $n \geq 3$), ta viết 2 bộ ba $(t, \underline{3tm - p}, m)$ và $(m, \underline{3mp - t}, p)$ theo thứ tự đó, ở dòng thứ $n + 1$, ngay dưới bộ ba (t, \underline{m}, p) .

Một số dòng đầu tiên của cây Markov là như sau:



Bài PT.4. Tìm công thức xác định bộ Markov nằm ngoài cùng bên trái của dòng thứ n trên cây Markov.

Bài PT.5. Chứng minh rằng mỗi bộ Markov có đúng một hoán vị xuất hiện trong cây Markov.

B. Một số tính chất của các bộ Markov

Trong các bài tập sau đây, ta cho trước một bộ Markov (a, b, c) .

Bài PT.6. Chứng minh rằng

a) Mọi ước nguyên tố lẻ của c đều đồng dư với 1 modulo 4.

b) Nếu c là chẵn thì c đồng dư với 2 modulo 32.

Bài PT.7. Chứng minh rằng các số a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau.

Bài PT.8. Chứng minh rằng tồn tại một bộ Markov có thành phần lớn nhất bằng c .

Bài PT.9. a) Ta giả sử c là một số lẻ và giả sử tồn tại một bộ Markov (a', b', c) sao cho $(a', b') \neq (a, b)$ và $(a', b') \neq (b, a)$. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương m, n nguyên tố cùng nhau sao cho $c = mn$ và $aa' - bb' \equiv 0 \pmod{m^2}$, $ab' - a'b \equiv 0 \pmod{n^2}$.

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố lẻ p và mọi số nguyên dương k tồn tại không quá một bộ Markov có thành phần lớn nhất bằng p^k .

Hết

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.