HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2017**

ĐỀ THI MÔN: TỔ HỢP

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng PT

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong chứng minh của câu sau. Nếu một câu được chứng minh không dựa vào kết quả của các câu trước thì có thể dùng để chứng minh các câu trước.

Bài toán lát đôminô

Một quân đôminô là một bảng ô vuông kích thước 1×2 hoặc 2×1.

Giả sử m, n là hai số nguyên dương. Ta nói một bảng ô vuông kích thước $m \times n$, gồm m hàng và n cột, là có thể lát được bởi các quân đôminô nếu ta có thể xếp một số quân đôminô đôi một không chồng lên nhau sao cho chúng phủ kín bảng đã cho và không phủ bất kì phần nào khác của mặt phẳng. Hai cách lát là khác nhau nếu tồn tại 2 ô vuông của bảng được phủ bởi cùng 1 quân đôminô trong cách lát này nhưng không được phủ bởi cùng 1 quân đôminô trong cách lát kia.

Để thuận tiện, trong mỗi bảng ô vuông, ta đánh thứ tự các hàng từ dưới lên trên và các cột từ trái qua phải. Các ô của bảng được kí hiệu một cách tương ứng: ô (i, j) kí hiệu ô nằm trên hàng i và cột j.

A. Sự tồn tại cách lát đôminô

Bài PT.1. Chứng minh rằng với mọi m, n nguyên dương bảng $m \times n$ có thể lát được bởi các quân đôminô khi và chỉ khi mn là một số chẵn.

Bài PT.2. Với các giá trị nào của m, n thì bảng $m \times n$ bị khuyết ô $(1, 1)$ có thể lát được bởi các quân đôminô?

Bài PT.3. Cùng câu hỏi trên cho bảng $m \times n$ bị khuyết 2 ô $(1, 1)$ và (m, n).

B. Số cách lát và quan hệ truy hồi

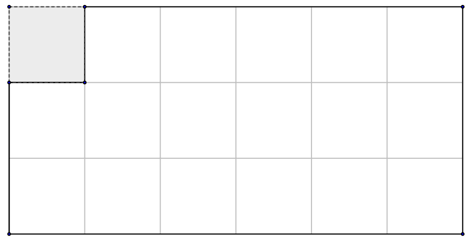
Bài PT.4. Với mỗi số nguyên dương n, gọi u_n là số cách lát đôminô của một bảng chữ nhật $2 \times n$. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 3$ thì

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

(Xem tiếp trang sau)

Từ đó suy ra $u_n = F_n$ với mọi $n \geq 1$, trong đó $(F_n)_{n\geq 0}$ là dãy Fibonacci định nghĩa bởi: $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ với mọi $n \geq 0$.

Bài PT.5. a) Với n nguyên dương, gọi t_n là số cách lát đôminô của một bảng $3 \times n$ và s_n là số cách lát một bảng $3 \times n$ bị khuyết ô $(3, 1)$:



Chứng minh rằng với mọi $n \geq 3$ thì

$$\begin{cases} t_n = 2s_{n-1} + t_{n-2} \\ s_n = t_{n-1} + s_{n-2}. \end{cases}$$

b) Xác định công thức tổng quát của t_n.

Bài PT.6. Với mọi số nguyên dương n, gọi x_n là số cách lát đôminô một bảng $4 \times n$. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$ thì

$$x_{n+4} = x_{n+3} + 5x_{n+2} + x_{n+1} - x_n.$$

C. Tính chẵn lẻ của số cách lát

Trong các bài toán sau, gọi $f(m, n)$ là số cách lát một bảng $m \times n$ bởi các quân đôminô.

Bài PT.7. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $f(n, n)$ là một số chẵn.

Bài PT.8. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k, n thì $f(2^k - 1, 2n)$ là một số lẻ.

Bài PT.9. a) Ta gọi một bảng $n \times n$ $(n \geq 2)$ với một số ô (có thể bằng 0) của hàng n và một số ô (có thể bằng 0) của cột n bị khuyết là một bảng *tựa vuông* cỡ n. Một bảng tựa vuông cỡ n được gọi là tốt nếu ô (n, n) bị khuyết và với mọi $1 \leq k \leq n - 1$, trong số 2 ô (n, k) và (k, n) có đúng 1 ô bị khuyết. Chứng minh rằng số cách lát một bảng tựa vuông là lẻ khi và chỉ khi bảng đó là một bảng tựa vuông tốt.

b) Chứng minh rằng $f(m, n)$ là một số lẻ khi và chỉ khi $m + 1$ và $n + 1$ nguyên tố cùng nhau.

Hết

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*