



ĐỀ THI MÔN: TỔ HỢP
 Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng PT

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong chứng minh của câu sau. Nếu một câu được chứng minh không dựa vào kết quả của các câu trước thì có thể dùng để chứng minh các câu trước.

Bài toán về đàn gà

Mô tả bài toán. Người ta nhận thấy rằng giữa hai con gà G_1, G_2 khác nhau trong một đàn gà bất kì luôn có một quan hệ thắng-thua xác định: hoặc là G_1 thắng G_2 , hoặc là G_2 thắng G_1 (chỉ một trong hai khả năng). Một con gà K trong đàn được gọi là **vua** nếu, với mọi con gà G khác của đàn, hoặc là K thắng G , hoặc là K thua G nhưng có một con gà G' trong đàn sao cho K thắng G' và G' thắng G . Một con gà được gọi là **hoàng đế** nếu nó thắng mọi con gà khác trong đàn. Các bài toán sau đây quan tâm đến số vua có thể có trong một đàn gà.

A. Sự tồn tại của gà vua

Bài PT.1. a) Chứng minh rằng không có đàn gà nào có nhiều hơn một hoàng đế.

b) Nêu ví dụ về một đàn gà có một hoàng đế.

c) Nêu ví dụ về một đàn gà không có hoàng đế.

Bài PT.2. Xét một đàn gà bất kì và một con gà G của nó.

a) Giả sử G thắng nhiều con gà nhất trong đàn. Chứng minh rằng G là một vua của đàn. (Nói riêng mọi đàn gà không rỗng đều có ít nhất một vua.)

b) Giả sử G thua một con gà nào đó trong đàn. Chứng minh rằng G thua một vua nào đó trong đàn.

Bài PT.3. Chứng minh rằng nếu một đàn gà (≥ 3 con) không có hoàng đế thì phải có ít nhất ba vua.

B. Một đàn gà có thể có bao nhiêu vua?

Bài PT.4. Chứng minh rằng không có đàn gà nào có đúng hai vua.

Bài PT.5. Cho số nguyên dương n . Chứng minh rằng nếu tồn tại một đàn gà n con mà tất cả đều là vua thì cũng tồn tại một đàn gà $n + 2$ con mà tất cả đều là vua.

Bài PT.6. Chứng minh rằng không có đàn gà 4 con nào mà tất cả đều là vua.

Bài PT.7. Hãy đưa ra ví dụ về một đàn gà 6 con mà tất cả đều là vua.

Bài PT.8. (2đ) Cho các số nguyên dương $k \leq n$. Chứng minh rằng tồn tại một đàn gà n con, trong đó có đúng k vua, trừ hai trường hợp: $k = 2, n \geq 2$ (bất kì) và $k = n = 4$.

C. Sắp thứ tự đàn gà

Bài PT.9. Cho một đàn gà có $n \geq 2$ con. Chứng minh rằng có thể đánh số các con gà từ 1 đến n sao cho với mọi $k = 1, 2, \dots, n - 1$ thì con số k thắng con số $k + 1$ và hơn nữa, nếu bỏ các con số $1, 2, \dots, k$ ra khỏi đàn gà thì con số $k + 1$ là một vua trong đàn gà còn lại.

————— **Hết** —————

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.