HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2019**

ĐỀ THI MÔN: SỐ HỌC

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng PT

A. Bảng Stern

Bảng Stern:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
1 & & & & & & & & 2 & & & & & & & & 1 \\
1 & & & & 3 & & & & 2 & & & & 3 & & & & 1 \\
1 & & 4 & & 3 & & 5 & & 2 & & 5 & & 3 & & 4 & & 1 \\
1 & 5 & 4 & 7 & 3 & 8 & 5 & 7 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

là bảng vô hạn dòng được xây dựng theo cách như sau:

- Viết tại dòng thứ nhất hai số 1; và sau khi đã xây dựng được dòng thứ n $(n \geq 1)$,
- Viết lại dòng thứ n tại dòng thứ $n+1$; đồng thời chèn vào giữa hai số hạng liên tiếp bất kì một số mới, bằng tổng của hai số hạng đó...

Bài PT.1. Chứng minh rằng dòng thứ n của bảng có $2^{n-1}+1$ số.

Bài PT.2. Trung bình cộng của các số trên dòng thứ n bằng bao nhiêu?

Bài PT.3. Chứng minh rằng

a) Số thứ k và số thứ $2^{n-1}+2-k$ $(1 \leq k \leq 2^{n-1}+1)$ trên dòng thứ n là bằng nhau;

b) Hai số liên tiếp trên mỗi dòng là nguyên tố cùng nhau;

c) Nếu a, b, c là 3 số liên tiếp, theo thứ tự đó, trên một dòng nào đó của bảng thì $b \mid a+c$.

B. Dãy Stern

Trong bảng Stern ở trên, ta xóa đi cột ngoài cùng bên phải (gồm các số 1), rồi liệt kê các số còn lại của bảng tuần tự từ trái sang phải, từ trên xuống dưới:

$$1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, 5, \ldots$$

Người ta gọi dãy $(s_n)_{n\geq 1}$ thu được ở trên là dãy Stern.

Bài PT.4. Chứng minh rằng dãy Stern (s_n) được xác định bởi các điều kiện: $s_1 = 1$ và

$$s_n = \begin{cases} s_{n/2} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ s_{(n-1)/2} + s_{(n+1)/2} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

với mọi $n \geq 2$.

Bài PT.5. Giá trị của số thứ 304 trên dòng thứ 2019 của bảng Stern bằng bao nhiêu?

Bài PT.6. Chứng minh rằng s_{n+1} bằng số cách biểu diễn n thành tổng của các lũy thừa với số mũ nguyên và không âm của 2, mà mỗi luỹ thừa có mặt không quá hai lần trong tổng (không kể thứ tự giữa các hạng tử trong tổng; chẳng hạn, $4 = 2^2 = 2^1 + 2^1 = 2^1 + 2^0 + 2^0$ và $s_5 = 3$).

C. Một số tính chất của bảng và dãy Stern

Bài PT.7. Chứng minh rằng

a) $s_{j(n)} = F_n$, trong đó $j(n) = \frac{2^n-(-1)^n}{3}$;

b) Giá trị lớn nhất của các số trên dòng thứ n của bảng Stern bằng F_{n+1}.

Ở đây, (F_n) là dãy Fibonacci quen biết, được cho bởi $F_1 = F_2 = 1$ và quan hệ truy hồi:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n \geq 3.$$

Bài PT.8. Chứng minh rằng mọi số hữu tỷ dương đều xuất hiện một và chỉ một lần trong dãy vô hạn các phân số:

$$\frac{s_1}{s_2}, \frac{s_2}{s_3}, \frac{s_3}{s_4}, \ldots, \frac{s_n}{s_{n+1}}, \ldots$$

Hết

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*