



Bảng B

Bài B.1. Cho a, b là các số thực và

$$A = \begin{pmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ 0 & -a & b & 0 \\ 0 & 0 & -a & b \\ b & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

- (i) Tính định thức của A .
- (ii) Với các giá trị a, b nào thì A khả nghịch và trong trường hợp đó hãy tính A^{-1} .
- (iii) Công ty cây xanh đô thị thực hiện Dự án thay thế các cây già cỗi và cây không đúng chủng loại bởi các cây mới. Công ty thực hiện chương trình trong bốn tháng. Trong mỗi tháng công ty sẽ chặt bỏ 10% tổng số cây xanh trong thành phố tính tới ngày đầu tiên của tháng, đồng thời thực hiện trồng thêm một số cây xanh. Cụ thể trong tháng thứ nhất sẽ trồng thêm 100 cây, tháng thứ hai trồng thêm 102 cây, tháng thứ ba trồng thêm 104 cây, tháng cuối cùng trồng thêm 106 cây. Tại buổi tổng kết Dự án người ta cho biết, tổng số cây hiện tại trong thành phố đã tăng thêm 80 so với trước khi thực hiện Dự án. Hỏi hiện nay thành phố có bao nhiêu cây xanh?

Bài B.2. Ký hiệu D là phép đạo hàm trên tập các đa thức hệ số thực $\mathbb{R}[x]$ và T là ánh xạ từ $\mathbb{R}[x]$ vào chính nó, cho bởi $T(p(x)) = xp(x)$.

- (i) Chứng minh rằng ánh xạ D không là đơn ánh và ánh xạ T không là toàn ánh.
- (ii) Chứng minh rằng ánh xạ $D \circ T - T \circ D : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ là song ánh.

Bài B.3. Ký hiệu V là không gian véc tơ các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n với hệ số thực. Xét ánh xạ tuyến tính

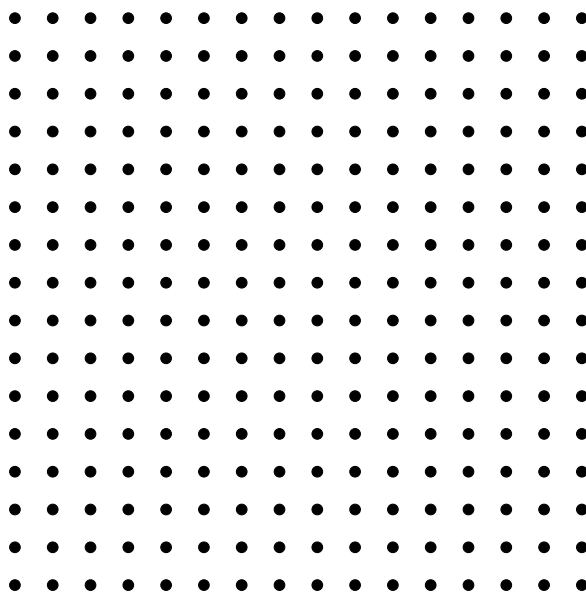
$$\Phi : V \rightarrow V, \quad \text{cho bởi} \quad \Phi(p(x)) = p(x + 1) - p(x).$$

- (i) Tìm ma trận biểu diễn của Φ theo cơ sở $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ của V .
- (ii) Chứng minh rằng $\Phi^{n+1} = 0$.
- (iii) Tìm một cơ sở để theo đó ma trận của Φ có dạng dưới đây:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- (iv) Xác định tất cả các đa thức p thoả mãn: $p(a+1) + p(a-1) = 2p(a)$ với mọi số nguyên a .

Bài B.4. Xét mảng 16×16 tạo thành từ các dãy điểm như Hình 1 (khoảng cách giữa các hàng và các cột là 1 đơn vị).



Hình 1. Mảng 16×16 điểm

- (i) Tìm số hình vuông với đỉnh trên mảng và có diện tích bằng 4 (đơn vị diện tích).
- (ii) Tìm số hình vuông với đỉnh trên mảng và có diện tích bằng 25 (đơn vị diện tích).

Hết

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.