HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM — ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016

CHỦ ĐỀ: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng PT

Mục tiêu của bài thi này là tìm hiểu một số trường hợp riêng của định lý Markov: nếu $P(x)$ là một đa thức với hệ số thực và có bậc không vượt quá n thì

$$\max_{|x|\le 1}|P'(x)| \le n^2 \max_{|x|\le 1}|P(x)|.$$

Chứng minh của định lý Markov vượt quá chương trình toán THPT. Ta sẽ tìm cách chứng minh những trường hợp riêng khi $n \le 3$ của định lý và khảo sát một số bài toán xung quanh các trường hợp đó.

Trong các bài toán dưới đây, biến số x chỉ nhận giá trị thực.

A. Bất đẳng thức Markov cho đa thức bậc nhất

Bài PT.1. Giả sử a, b là hai số thực sao cho $|ax + b| \le 1$ khi $|x| \le 1$. Chứng minh rằng:

(i) $|a| \le 1$.

(ii) $|bx + a| \le 1$ khi $|x| \le 1$.

B. Bất đẳng thức Markov cho các đa thức bậc hai và bậc ba

Bài PT.2. Giả sử a, b, c là ba số thực sao cho các giá trị của đa thức $ax^2 + bx + c$ tại $1, 0, -1$ đều thuộc đoạn $[-1, 1]$.

(i) Chứng minh rằng $|2ax + b| \le 4$ khi $|x| \le 1$.

(ii) Chứng minh rằng $|cx^2 + bx + a| \le 2$ khi $|x| \le 1$.

Bài PT.3. Giả sử a, b, c, d là bốn số thực sao cho các giá trị $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ của đa thức $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tương ứng tại $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ đều thuộc đoạn $[-1, 1]$.

(i) Chứng minh rằng với mọi số thực A, B, ta có đẳng thức $|A+B|+|A-B| = 2\max\{|A|, |B|\}$.

(ii) Bằng cách biểu diễn $3ax^2 + 2bx + c$ theo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ và x, hãy chứng minh rằng $|3ax^2 + 2bx + c| \leq 9$ khi $|x| \leq 1$.

(iii) Chứng minh rằng $|dx^3 + cx^2 + bx + a| \leq 4$ khi $|x| \leq 1$.

C. Hai bất đẳng thức khác cho các tam thức

Bài PT.4. Cho a, b, c là ba số thực và n là một số nguyên dương. Giả sử đa thức $f(x) = ax^{2n} + bx + c$ có các giá trị tại $1, 0, -1$ đều thuộc đoạn $[-1, 1]$. Chứng minh rằng:

(i) $|f(x)| \leq \dfrac{2n-1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}} + 1$ khi $|x| \leq 1$.

(ii) Với mỗi $1 \leq M < \infty$, ta có $|f(x)| \leq 2M^{2n} - 1$ khi $1 \leq |x| \leq M$.

Hết

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*