



(Đề thi có 02 trang)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
MÔN: ĐẠI SỐ
 Thời gian làm bài: 180 phút.

Bảng B

Bài B.1. Cho một số thực a và một số nguyên $n > 0$. Xét ma trận vuông cấp n sau

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \dots & 0 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Tính định thức của A trong các trường hợp

- (a) (2 điểm) $n = 4$;
- (b) (4 điểm) n là số nguyên dương bất kỳ.

Bài B.2. Người ta khảo sát một mô hình di cư dân số giữa hai vùng đô thị và nông thôn với quy luật như sau: Hằng năm, có 50% dân số vùng nông thôn chuyển về vùng đô thị và đồng thời có 25% dân số vùng đô thị chuyển về vùng nông thôn sinh sống. Giả sử x, y tương ứng là số dân vùng nông thôn và vùng đô thị ở thời điểm ban đầu ($x, y > 0$).

- (a) (4 điểm) Hỏi sau k năm dân số của vùng nông thôn và vùng đô thị là bao nhiêu?
- (b) (2 điểm) Giả sử ban đầu số người sống ở nông thôn và đô thị là bằng nhau. Có thể đến lúc nào đó dân số của vùng đô thị vượt quá 80% tổng dân số của cả hai vùng không? Giải thích câu trả lời.

Bài B.3. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 6 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

- (a) (3 điểm) Tính A^4 ;
- (b) (5 điểm) Chứng minh rằng hai hệ phương trình sau có cùng tập hợp nghiệm trong \mathbb{R}^4 ,

$$Ax = 0, \tag{1}$$

$$(A + A^2 + A^3 + A^4)x = 0. \tag{2}$$

Bài B.4. Một ma trận vuông được gọi là dương nếu tất cả hệ số của nó là các số thực dương.

- (a) (2 điểm) Chứng minh rằng mỗi ma trận dương cấp 2 đều có hai giá trị riêng là các số thực khác nhau và giá trị riêng có giá trị tuyệt đối lớn nhất là một số dương;

- (b) (2 điểm) Cho A là một ma trận dương cấp 2. Giả sử $v \in \mathbb{R}^2$ là một véc tơ riêng ứng với giá trị riêng lớn nhất của A . Chứng minh rằng hai thành phần của véc tơ v có cùng dấu;
- (c) (2 điểm) Cho A là một ma trận dương cấp 3. Xét tập các giá trị riêng của A (kể cả các giá trị phức), chứng minh rằng giá trị riêng có mô đun lớn nhất của A là một số thực dương.

Bài B.5. Cho trước 6 điểm phân biệt trên một đường tròn.

- (a) (3 điểm) Chia 6 điểm đó thành ba cặp và nối hai điểm trong mỗi cặp bởi một dây cung. Hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho không có hai dây cung nào cắt nhau?
- (b) (3 điểm) Đánh số các điểm đó lần lượt từ 1, 2, ..., 6. Mỗi dây cung nối hai điểm bất kỳ được gán với giá trị tuyệt đối của hiệu các số ở hai đầu mút. Chọn ra 3 dây cung, đôi một không có đầu mút chung, rồi lấy tổng của các số gán với các dây cung đó. Hỏi giá trị lớn nhất của tổng nhận được bằng bao nhiêu?

————— **Hết** —————

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.