



(Đề thi có 02 trang)

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

**Bảng A**

**Bài A.1.** Cho  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  là dãy số được xác định bởi các điều kiện

$$x_1 = 2019, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2018}x_n^2 + \frac{2017}{2018}x_n \quad \forall n \geq 1.$$

1. (2 điểm) Chứng minh rằng  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  là một dãy số tăng ngặt và không bị chặn trên.
2. (2 điểm) Chứng minh rằng

$$\frac{x_n}{x_{n+1} - 1} = 2018 \left( \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1} \right) \quad \forall n \geq 1.$$

3. (2 điểm) Tìm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_3 - 1} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1} - 1} \right).$$

**Bài A.2.** (6 điểm) Giả sử  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm số khả vi sao cho

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx.$$

Chứng minh rằng tồn tại số thực  $c \in (0, 1)$  sao cho

$$f(c) = 2018 f'(c) \int_0^c f(x) dx.$$

**Bài A.3.** (6 điểm) Cho hai số thực  $a < b$ . Giả sử  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm số khả vi liên tục sao cho

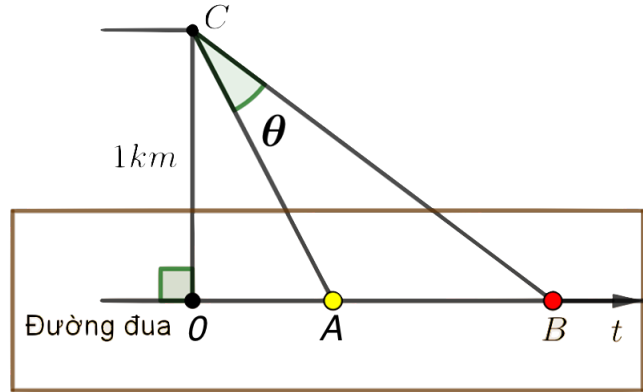
$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Chứng minh rằng

$$\max_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

**Bài A.4.** Một quan sát viên  $C$  đứng cách đường đua  $Ot$  một khoảng  $OC = 1 \text{ km}$  ( $OC \perp Ot$ ).

Hai vận động viên điền kinh  $A, B$  xuất phát tại  $O$  và chạy cùng lúc (sang phải, như hình vẽ) trên đường đua. Góc  $\theta = \angle(CA, CB)$  được gọi là góc nhìn từ  $C$  đến hai vận động viên. Giả sử  $B$  luôn chạy nhanh gấp bốn lần  $A$ .



- (2 điểm) Tính  $\tan \theta$  theo  $x = OA$  (km).
- (4 điểm) Xác định vị trí của hai vận động viên trên đường đua để góc nhìn  $\theta$  từ  $C$  đến họ đạt giá trị lớn nhất.

**Bài A.5.** Giả sử  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm số khả vi, với  $f'$  dương và liên tục, sao cho

$$f(0) = 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f'(x)(1 + x^2 + f(x))} = +\infty.$$

- (3 điểm) Chứng minh rằng hàm  $f$  bị chặn trên.
- (1,5 điểm) Hãy tìm ví dụ về một hàm  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  khả vi và bị chặn trên, với  $f'$  dương và liên tục,  $f(0) = 0$ , sao cho giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f'(x)(1 + x^2 + f(x))}$$

tồn tại và hữu hạn.

- (1,5 điểm) Hãy tìm ví dụ về một hàm  $f$  thỏa mãn tất cả các điều kiện của đề bài.

**HẾT**

Ghi chú: Thí sinh **không** được phép sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi **không** cần giải thích gì thêm.