Bài A.1. Cho các số thực a, b thoả mãn $a+b>2$ và ma trận

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1 & b\\ a & 1 & b & 1\\ 1 & b & 1 & a\\ b & 1 & a & 1\end{pmatrix}$$

Biện luận theo a, b hạng của ma trận A.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Tính định thức của ma trận A ta được

$$\det(A)=(a-b)^2((a+b)^2-4).$$

Vì $a+b>2$ nên $\det(A)=0$ khi và chỉ khi $a=b$.

TH 1: Nếu $a\neq b$ thì A khả nghịch. Do đó $\operatorname{rank}(A)=4$.

TH 2: Nếu $a=b$ thì bằng cách cộng dồn các cột lại cột 1 ta có

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}2+2a & a & 1 & a\\ 2+2a & 1 & a & 1\\ 2+2a & a & 1 & a\\ 2+2a & 1 & a & 1\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & a-1 & 0 & a-1\\ 1 & 0 & a-1 & 0\\ 1 & a-1 & 0 & a-1\\ 1 & 0 & a-1 & 0\end{pmatrix}=2$$

Cách 2: Trừ cột 2 cho a.cột 1, cột 3 cho cột 1, cột 4 cho b.cột 1, ta suy ra

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ a & 1-a^2 & b-a & 1-ab\\ 1 & b-a & 0 & a-b\\ b & 1-ab & a-b & 1-b^2\end{pmatrix}=1+\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1-a^2 & b-a & 1-ab\\ b-a & 0 & a-b\\ 1-ab & a-b & 1-b^2\end{pmatrix}$$

TH 1: Nếu $a=b$ thì

$$\operatorname{rank}(A)=1+\operatorname{rank}\left(1-a^2\right)$$

Vì $a+b>2$ nên $a>1$. Do đó $\operatorname{rank}(A)=2$.

TH 2: Nếu $a\neq b$ thì

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A)=&1+\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & 1-a^2 & 1-ab\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1-ab & 1-b^2\end{pmatrix}\\ =&1+\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 2-a^2-ab & 2-b^2-ab\end{pmatrix}\\ =&1+\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 2-a^2-ab & (2-a-b)(2+a+b)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Vì $a+b>2$ nên $\operatorname{rank}(A)=4$.

Kết luận

$$\operatorname{rank}(A)=\begin{cases}4 & \text{nếu } a\neq b,\\ 2 & \text{nếu } a=b.\end{cases}$$

Bài A.2. Một nhà máy sản xuất năm loại sản phẩm A, B, C, D, E. Mỗi loại phải qua năm công đoạn cắt, gọt, đóng gói, trang trí và dán nhãn với thời gian cho mỗi công đoạn như trong bảng sau:

	Cắt	Gọt	Đóng gói	Trang trí	Dán nhãn
Sản phẩm A	1 giờ	1 giờ	1 giờ	1 giờ	1 giờ
Sản phẩm B	4 giờ	3 giờ	3 giờ	2 giờ	1 giờ
Sản phẩm C	8 giờ	12 giờ	6 giờ	3 giờ	1 giờ
Sản phẩm D	12 giờ	15 giờ	10 giờ	4 giờ	1 giờ
Sản phẩm E	20 giờ	24 giờ	10 giờ	5 giờ	1 giờ

Các bộ phận cắt, gọt, đóng gói, trang trí, dán nhãn có *số giờ công tối đa* trong một tuần lần lượt là **180**, **220**, **120**, **60**, **20** giờ. Trong thiết kế ban đầu của nhà máy có phương án về số lượng mỗi loại sản phẩm nhà máy phải sản xuất trong một tuần để sử dụng hết công suất các bộ phận. Tính số lượng mỗi loại sản phẩm được sản xuất trong một tuần theo phương án đó.

Hướng dẫn giải

Gọi số sản phẩm của từng loại A, B, C, D, E lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Để sử dụng hết công suất của nhà máy thì

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & + & 12x_4 & + & 20x_5 & = & 180 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 12x_3 & + & 15x_4 & + & 24x_5 & = & 220 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & + & 10x_5 & = & 120 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 60 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 20 \end{array}\right.$$

Sử dụng phép thế đưa ma trận hệ phương trình về dạng bậc thang. Giải hệ ta được

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 4.$$

Bài A.3. Trong không gian véc tơ V gồm các đa thức hệ số thực có bậc nhỏ hơn 7, cho các đa thức

$$B_i = x^i(1-x)^{6-i}, i = 0, 1, \dots, 6.$$

Chứng minh rằng

(a) Các đa thức $B_0, B_1, \dots, B_6$ là độc lập tuyến tính trong V;

(b) Có thể bỏ đi một đa thức B_i nào đó sao cho các đạo hàm B_0', ..., B_{i-1}', B_{i+1}', ..., B_6' là độc lập tuyến tính.

Hướng dẫn giải

(a) Các đa thức B_i được gọi là đa thức Bernstein.

Cách b1: Xét một quan hệ

$$b_0B_0 + b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 + b_4B_4 + b_5B5 + b_6B6 = 0.$$

với $b_0, \dots, b_6 \in \mathbb{R}$. Thay $x = 0$ ta suy ra $b_0 = 0$. Chia hai vế cho x, sau đó tiếp tục thay $x = 0$ ta được $b_1 = 0$. Tương tự suy ra $b_2 = \dots = b_6 = 0$.

Cách b2: Ma trận của hệ các đa thức $B_0, B_1, \dots, B_6$ đối với cơ sở chính tắc $1, x, \dots, x^6$ của V là ma trận tam giác dưới với các phần tử trên đường chéo bằng 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\binom{6}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{6}{2} & -\binom{5}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\binom{6}{3} & \binom{5}{2} & -\binom{4}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{6}{4} & -\binom{5}{3} & \binom{4}{2} & -\binom{3}{1} & 1 & 0 & 0 \\ -\binom{6}{5} & \binom{5}{4} & -\binom{4}{3} & \binom{3}{2} & -\binom{2}{1} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vì vậy hạng của ma trận này bằng 7 và hệ đa thức là độc lập tuyến tính.

(b) Có thể lập luận theo hai cách

Cách b1: Tính toán trực tiếp ta có

$$\begin{cases} B_0' = -6(1-x)^5, \\ B_1' = (1-x)^4(1-6x), \\ B_2' = x(1-x)^3(2-6x), \\ B_3' = x^2(1-x)^2(3-6x), \\ B_4' = x^3(1-x)(4-6x), \\ B_5' = x^4(5-6x), \\ B_6' = 6x^5. \end{cases}$$

Ta chỉ ra sau khi bỏ đi B_0' các đa thức còn lại là độc lập tuyến tính. Thật vậy giả sử có một ràng buộc tuyến tính

$$\begin{aligned} a_0(1-x)^4(1-6x) + a_1x(1-x)^3(2-6x) + a_2x^2(1-x)^2(3-6x) \\ + a_3x^3(1-x)(4-6x) + a_4x^4(5-6x) + 6a_5x^5 = 0. \quad (1) \end{aligned}$$

Thay $x = 0$ suy ra $a_0 = 0$. Thay vào đẳng thức trên rồi chia hai vế cho x. Tiếp tục thay $x = 0$ suy ra $a_1 = 0$. Bằng cách tương tự suy ra $a_0 = a_1 = \dots = a_5 = 0$.

Cách b2: Ta chỉ ra sau khi bỏ đi B_0' các đa thức còn lại là độc lập tuyến tính.

Ma trận của hệ các đa thức $B_1', \ldots, B_6'$ đối với cơ sở chính tắc $1, x, \ldots, x^5$ của V là ma trận tam giác dưới với các phần tử trên đường chéo bằng $1, 2, 3, 4, 5, 6$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\binom{5}{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\binom{5}{2} & -3\binom{4}{1} & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -4\binom{5}{3} & 4\binom{4}{2} & -4\binom{3}{1} & 4 & 0 & 0 \\ 5\binom{5}{4} & -5\binom{4}{3} & 5\binom{3}{2} & -5\binom{2}{1} & 5 & 0 \\ -6 & 6 & -6 & 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Do đó hệ là độc lập tuyến tính.

Cách b3: Gọi k là số lớn nhất các hàm độc lập tuyến tính trong số các đạo hàm $B_0', \ldots, B_9'$ và giả sử $k \leq 8$. Bằng cách ký hiệu lại các hàm là $f_1, \ldots, f_{10}$, ta giả sử $f_1', \ldots, f_k'$ là độc lập tuyến tính. Như vậy, f_9', f_{10}' có các biểu diễn tuyến tính:

$$f_9' = a_1 f_1' + \ldots + a_k f_k', f_{10}' = b_1 f_1' + \ldots + b_k f_k',$$

với $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, hay

$$(f_9 - a_1 f_1 - \ldots - a_k f_k)' = (f_{10} - b_1 f_1 - \ldots - b_k f_k)' = 0.$$

Như vậy, $f_9 - a_1 f_1 - \ldots - a_k f_k = c_1, f_{10} - b_1 f_1 - \ldots - b_k f_k = c_2$, với c_1, c_2 là các hằng số nào đó. Rõ ràng $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ do tính độc lập của $f_1, \ldots, f_{10}$. Nhưng khi đó

$$c_1 (f_{10} - b_1 f_1 - \ldots - b_k f_k) - c_2 (f_9 - a_1 f_1 - \ldots - a_k f_k) = 0$$

là một quan hệ phụ thuộc giữa $f_1, \ldots, f_{10}$, mâu thuẫn.

Bài A.4. Một dãy số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ được gọi là *răng cưa* nếu $a_1 < a_2$, $a_2 > a_3$, $a_3 < a_4, \ldots$, hay nói cách khác, $a_{2k-1} < a_{2k}$ với mọi $0 < 2k \le n$ và $a_{2k} > a_{2k+1}$ với mọi $1 < 2k+1 \le n$.

(a) Có bao nhiêu dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 sao cho $1 \le a_i \le 5$ với mọi $i = 1, 2, 3$?

(b) Có bao nhiêu dãy răng cưa a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sao cho $1 \le a_i \le 5$ với mọi $i = 1, \ldots, 5$?

Hướng dẫn giải

(a) Có hai cách trình bày.

Cách 1: Với mỗi $a_2 = k$ $(1 \le k \le 5)$, số bộ (a_1, a_3) sao cho $a_1 < k, a_3 < k$ bằng $(k-1)^2$. Do đó, số dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 bằng

$$\sum_{k=1}^{5}(k-1)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.$$

Cách 2: Gọi s_k là số các dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 mà $a_3 = k$ và $1 \le a_1, a_2 \le 5$. Như vậy, $a_2 = i$, với $i = k+1, \ldots, 5$ và với mỗi $a_2 = i$ thì a_1 có thể được chọn trong tập $\{1, 2 \ldots i-1\}$. Suy ra

$$s_k = \sum_{i=k+1}^{5}(i-1) = 10 - \frac{k(k-1)}{2}.$$

Như vậy, $s_1 = 10, s_2 = 9, s_3 = 7, s_4 = 4, s_5 = 0$. Vì thế tổng số các dãy răng cưa cần tìm là $\sum_{k=1}^{5} s_k = 10 + 9 + 7 + 4 = 30$.

(b) Mỗi dãy răng cưa a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 có thể được hiểu như được tạo ra từ các dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 và a_3, a_4, a_5, nói cách khác, được tạo thành từ 2 dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 và a_1', a_2', a_3' mà $a_3 = a_1'$. Do tính đối xứng, số các dãy răng cưa a_1, a_2, a_3 với $a_3 = k$ cũng rõ ràng bằng số các dãy răng cưa a_1', a_2', a_3' với $a_1' = k$. Theo cách giải thứ 2, chúng bằng s_k, trong đó $s_1 = 10, s_2 = 9, s_3 = 7, s_4 = 4, s_5 = 0$. Vì thế tổng số dãy răng cưa a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 cần tìm là

$$\sum_{k=1}^{5} s_k \cdot s_k = 10^2 + 9^2 + 7^2 + 4^2 = 264.$$

Bài A.5. Cho các ma trận thực A, B cỡ $n \times n$ thoả mãn $A = A^2B$. Giả sử A, B có cùng hạng. Chứng minh rằng

(a) Các hệ phương trình $AX = 0$ và $BX = 0$ có cùng tập nghiệm trong $\mathbb{R}^n$;

(b) $AB = (AB)^2$;

(c) $B = B^2A$.

Hướng dẫn giải

(a) Giả sử $X \in \mathbb{R}^n$ là nghiệm của phương trình $BX = 0$. Khi đó $AX = A^2BX = 0$ nên X cũng là nghiệm của phương trình $AX = 0$. Vì A và B có cùng hạng nên hai không gian nghiệm có cùng số chiều. Dẫn đến hai không gian phải bằng nhau, ký hiệu là W.

(b) Có hai cách trình bày:

Cách b1: Với mọi $u \in \mathbb{R}^n$ ta có $A(u - ABu) = Au - A^2Bu = 0$. Theo câu (a), ta có $B(u - ABu) = 0$. Dẫn đến $Bu = BABu$ với mọi $u \in \mathbb{R}^n$. Vậy $B = BAB$ và do đó $AB = (AB)^2$.

Cách b2: Để thuận tiện ta ký hiệu $\mathrm{Im}(A) = \{Au : \text{ với mọi } u \in \mathbb{R}^n\}$. Với $u \in \mathbb{R}^n$, đặt $v = ABu$ ta có $Av = A^2Bu = Au$ nên $u - v \in W$. Do đó $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(AB) + W$. Dễ thấy $(AB)^2 = AB$ hay AB là phép chiếu.

(c) Từ lập luận b1/b2, ta cũng có $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(AB) + W$ (ví dụ, từ (b2) thì với mọi $u \in \mathbb{R}^n$, $u - ABu \in W$). Do đó

$$\dim \mathrm{Im}(AB) \geq n - \dim(W) = \mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)).$$

Mà $\mathrm{Im}(AB) \subseteq \mathrm{Im}(A)$ nên suy ra $\mathrm{Im}(AB) = \mathrm{Im}(A)$.

Tiếp theo ta chứng minh $A = ABA$: Với $u \in \mathbb{R}^n$ bất kỳ, vì $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(AB)$ nên $Au = ABv$ với $v \in \mathbb{R}^n$ nào đó. Khi đó

$$(ABA)u = (AB)(Au) = (AB)(ABv) = (AB)^2v = (AB)v = Au.$$

nên $ABA = A$.

Từ đó suy ra $A(I_n - BA) = 0$, hay $\mathrm{Im}(I_n - BA) \subseteq W$. Dẫn đến $B(I_n - BA) = 0$. Vậy $B = B^2A$.