HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.1

Công thức truy hồi được viết lại thành $u_{n+1} = u_n + (u_n - 1)^2$; suy ra dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ đơn điệu không giảm.

2. Nếu dãy hội tụ về ℓ thì $\ell = \ell + (\ell - 1)^2 \Rightarrow \ell = 1$.

1. Vì dãy đơn điệu không giảm nên nếu nó hội tụ về ℓ thì $u_n \leq \ell = 1$ $(\forall n \geq 1)$. Đặc biệt,

$$a^2 - a + 1 = u_2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a \leq 1.$$

   Đảo lại, cho $0 \leq a \leq 1$. Khi đó, $0 \leq u_1 \leq 1$. Giả sử với $n \geq 1$ nào đó, ta đã có $0 \leq u_n \leq 1$. Suy ra:

$$u_n(u_n - 1) \leq 0 \Rightarrow {u_n}^2 - u_n + 1 \leq 1.$$

   Theo công thức truy hồi, bất đẳng thức cuối này có thể viết được thành $u_{n+1} \leq 1$; vậy, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. Nguyên lý quy nạp cho ta $0 \leq u_n \leq 1$ với mọi $n \geq 1$.

   Dãy đã cho đơn điệu và bị chặn nên hội tụ.

   Kết luận: các giá trị cần tìm của a là $0 \leq a \leq 1$.

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.2

- Nếu $a, b \in \mathbb{N}^*$ thì ta có ngay:
$$\lim_{n\to\infty} (a\{nb\} + b\{na\}) = 0. \tag{1}$$

- Đảo lại, giả sử đã có (1). Dễ thấy $0 \le \{na\} < \frac{1}{b}(a\{nb\} + b\{na\})$, nên theo định lý về giới hạn kẹp thì (1) kéo theo
$$\lim_{n\to\infty} \{na\} = 0, \text{ và tương tự, } \lim_{n\to\infty} \{nb\} = 0. \tag{2}$$

Đến đây có thể chứng minh $a, b \in \mathbb{N}^*$ theo các cách khác nhau như sau:
Cách 1:

- Giả sử a vô tỉ. Khi đó trong biểu diễn thập phân
$$a = (C, c_1c_2\ldots)_{10} = C + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^i}$$
tồn tại một chữ số $c \neq 0$ xuất hiện vô hạn lần; tức là, tồn tại các chỉ số $i_1 < i_2 < \cdots$ sao cho $c = c_{i_1} = c_{i_2} = \ldots$ Xét $n = 10^{i_k - 1} \underset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} \infty$, ta có
$$na = (Cc_1\ldots c_{i_k-1}, c_{i_k}\ldots c_{i_{k+1}}\ldots)_{10} \Rightarrow \{na\} > (0, c)_{10} = \frac{c}{10} > 0,$$
mâu thuẫn với (2).

- Vậy a hữu tỉ: $a = \frac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{N}^*$. Xét $n = kq + 1 \underset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} \infty$, ta có $\{na\} = \{kp + a\} = \{a\}$ nên (2) $\Rightarrow \{a\} = 0$. Từ đó, $a \in \mathbb{N}^*$. Tương tự, $b \in \mathbb{N}^*$.

Cách 2:

- Ta sẽ chứng minh rằng $\{a\} = 0$. Giả sử đpcm là sai. Khi đó $0 < \{a\} < 1$. Với $\varepsilon := \min\{1 - \{a\}, \{a\}\} > 0$, theo (2) và định nghĩa của giới hạn, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $0 \le \{na\} < \varepsilon$ với mọi $n \ge n_0$. Đặc biệt,
$$0 \le \{n_0a\}, \{(n_0+1)a\} < \varepsilon. \tag{3}$$

- Lại có
$$\{(n_0+1)a\} = \{[a] + \{a\} + [n_0a] + \{n_0a\}\} = \{\{a\} + \{n_0a\}\}. \tag{4}$$
Nhưng $0 < \{a\} \le \{a\} + \{n_0a\} < \{a\} + \varepsilon \le 1$ nên (3)-(4) kéo theo $\varepsilon > \{(n_0+1)a\} = \{a\} + \{n_0a\} \ge \{a\}$, mâu thuẫn với định nghĩa của ε! Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng $\{a\} = 0$, tức là $a \in \mathbb{N}^*$. Tương tự, ta có $b \in \mathbb{N}^*$.

ĐÁP ÁN

Lời giải các bài A.3

- Trong điều kiện thứ nhất, chọn $x = 0$ ta thấy $f(0)^2 \le 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Với $x \neq 0$, từ điều kiện này ta cũng có $f(x) \ge \dfrac{f(ax)^2}{a^3x^2} \ge 0$. Vậy, $f(x) \ge 0$ với mọi x.
- Nếu $a = 1$, điều kiện thứ nhất trở thành $f(x)^2 \le x^2 f(x)$, ta suy ra $f(x) \le x^2$ với mọi số thực x, nên đpcm là đúng. Bây giờ, xét trường hợp $a > 1$.
- Đặt $g(x) := \dfrac{|f(x)|}{x^2/a} = \dfrac{f(x)}{x^2/a} \ge 0$ với mọi $x \neq 0$. Từ nay, xem $x \neq 0$ và chỉ còn phải chứng minh rằng $g(x) \le 1$. Theo định nghĩa của g, ta có $f(x) = \dfrac{x^2}{a} g(x)$.
- Từ đó, viết lại theo g điều kiện thứ nhất như sau:

$$\left(\frac{(ax)^2}{a} g(ax)\right)^2 \le a^3x^2\frac{x^2}{a} g(x) \Leftrightarrow g(ax)^2 \le g(x). \tag{1}$$

  Dùng (1), bằng quy nạp theo $n \in \mathbb{N}$, ta thấy:

$$g(x) \le g\left(\frac{x}{a^n}\right)^{2^{-n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

- Theo điều kiện thứ hai, tồn tại $m, M \in (0, \infty)$ sao cho $(0 \le)\ f(t) \le M$ khi $|t| < m$ (trong bài B2, $m = 1$). Vì $a > 1$ nên cũng tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ (phụ thuộc vào x) để $\left|\dfrac{x}{a^n}\right| < m$ với mọi $n \ge n_0$; và với các số tự nhiên n như thế, (2) kéo theo

$$g(x) \le \left(\frac{f\left(\frac{x}{a^n}\right)}{\left(\frac{x}{a^n}\right)^2/a}\right)^{2^{-n}} \le \frac{a^{\frac{2n+1}{2^n}}}{x^{2^{1-n}}} M^{2^{-n}}. \tag{3}$$

- Dễ thấy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2^n} = 0$ (có thể dùng quy tắc l'Hospital), nên bằng cách cho $n \to \infty$ trong (3), ta có ngay $g(x) \le 1$, đpcm.

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.4

1. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \geq 0$, thì nói riêng, $f'(0) > 0$, nên điều kiện đầu của bài toán kéo theo $f(0) \geq 0$; nhưng lúc này f tăng ngặt trên $[0, \infty)$ nên điều kiện thứ hai không thể thỏa mãn được.

   Một cách tương tự, nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \geq 0$, thì ta cũng gặp mâu thuẫn. Vậy, $\exists x_1 \geq 0, f'(x_1) = 0$.

   Giả sử với $k \geq 1$ nào đó, ta đã chứng minh được sự tồn tại của k số $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ sao cho $f^{(n)}(x_n) = 0$ với mọi số nguyên dương $n \leq k$. Nếu $f^{(k+1)}(x) > 0$ với mọi $x > x_k$, thì $f^{(k)}$ tăng ngặt trên $[x_k, \infty)$; suy ra

   $$f^{(k)}(x) \geq f^{(k)}(x_k + 1) > f^{(k)}(x_k) = 0 \quad \forall x \geq x_k + 1.$$

   Với mỗi $x \geq x_k + 1$, lấy $\int_{x_k+1}^{x} \mathrm{d}t$ hai vế của bất đẳng thức $f^{(k)}(t) \geq f^{(k)}(x_k + 1)$ cả thảy k lần, ta sẽ thu được một bất đẳng thức có dạng

   $$f(x) \geq \frac{f^{(k)}(x_k + 1)}{k!} x^k + \text{một đa thức có bậc bé hơn } k \text{ của biến } x;$$

   vì thế, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, mâu thuẫn với điều kiện thứ hai.

   Một cách tương tự, nếu $f^{(k+1)}(x) < 0$ với mọi $x > x_k$, thì ta sẽ có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, cũng mâu thuẫn với điều kiện thứ hai. Vậy, $\exists x_{k+1} > x_k, f^{(k+1)}(x_{k+1}) = 0$. Nguyên lý quy nạp cho ta kết luận của bài toán.

2. Cuối cùng, một ví dụ về hàm số f thỏa mãn mọi yêu cầu của đề bài, và không đồng nhất bằng 0, được cho chẳng hạn bởi công thức $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ (điều kiện thứ hai được kiểm tra bằng quy tắc l'Hospital).

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.5

1. Dùng định lý cơ bản của phép tính vi-tích phân (về đạo hàm theo cận của tích phân xác định):
$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\ln x^\alpha} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x^{\alpha-1}-1}{\ln x} \quad \forall x > 1.$$
Vì thế: nếu $\alpha > 1$ thì $f'_\alpha > 0$ nên f_α tăng ngặt trên $I := (1,\infty)$; còn nếu $0 < \alpha < 1$ thì $f'_\alpha < 0$ nên f_α giảm ngặt trên I. Vậy, f_α luôn là một song ánh khả vi (nên liên tục) từ khoảng I lên một khoảng $I_\alpha \subset \mathbb{R}$, là ảnh của f_α. Ánh xạ ngược $g_\alpha := f_\alpha^{-1} : I_\alpha \to I$ cũng khả vi, $g'_\alpha(y) = \dfrac{1}{f'_\alpha(x)}$ với mọi $y = f_\alpha(x) \in I_\alpha$, suy ra f_α là một phép đồng phôi.

2. Để tìm I_α trong trường hợp $\alpha > 1$, ta đánh giá
$$f_\alpha(x) \geq (x^\alpha - x)\min\left\{\frac{1}{\ln t} : x \leq t \leq x^\alpha\right\} = \frac{x^\alpha - x}{\ln x^\alpha} = \frac{x}{\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha-1}-1}{\ln x} \underset{(x\to+\infty)}{\to} +\infty \quad (1)$$
(quy tắc l'Hospital).

Đổi biến số $t = \mathrm{e}^u$, ta lại có $f_\alpha(x) = \int_{\ln x}^{\alpha\ln x} \mathrm{e}^u \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$. Với mọi $x > 1$, khi $\ln x < u < \alpha\ln x$, ta có $x < \mathrm{e}^u < x^\alpha$, suy ra
$$x\ln\alpha = x\int_{\ln x}^{\alpha\ln x}\frac{\mathrm{d}u}{u} < f_\alpha(x) < x^\alpha\int_{\ln x}^{\alpha\ln x}\frac{\mathrm{d}u}{u} = x^\alpha\ln\alpha \Rightarrow \lim_{x\to1^+} f_\alpha(x) = \ln\alpha \quad (2)$$
Từ (1)-(2), ta thấy $I_\alpha = (\ln\alpha, +\infty)$.

Để tìm I_α trong trường hợp $0 < \alpha < 1$, ta có thể dùng một trong các cách:

<u>Cách 1</u>: Tương tự trường hợp $\alpha > 1$, lần này ta đánh giá
$$f_\alpha(x) \leq -(x - x^\alpha)\min\left\{\frac{1}{\ln t} : x^\alpha \leq t \leq x\right\} = \frac{x^\alpha - x}{\ln x} = x^\alpha\cdot\frac{1-x^{1-\alpha}}{\ln x} \underset{(x\to+\infty)}{\to} -\infty \quad (3)$$
(quy tắc l'Hospital).

Cũng đổi biến số $t = \mathrm{e}^u$, và để ý: với mọi $x > 1$, khi $\alpha\ln x < u < \ln x$, ta có $x^\alpha < \mathrm{e}^u < x$, suy ra
$$x\ln\alpha = -x\int_{\alpha\ln x}^{\ln x}\frac{\mathrm{d}u}{u} < f_\alpha(x) < -x^\alpha\int_{\alpha\ln x}^{\ln x}\frac{\mathrm{d}u}{u} = x^\alpha\ln\alpha \Rightarrow \lim_{x\to1^+} f_\alpha(x) = \ln\alpha \quad (4)$$
Từ (3)-(4), ta thấy $I_\alpha = (-\infty, \ln\alpha)$.

<u>Cách 2</u>: Ta có $f_\alpha(x) = -f_{\frac{1}{\alpha}}(z)$ với $z := x^\alpha$; mà $\dfrac{1}{\alpha} > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} z = +\infty$ và $z \to 1^+$ khi $x \to 1^+$ nên dùng chính kết quả của trường hợp đã chứng minh ở trên ta có ngay:
$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = -\lim_{z\to+\infty} f_{\frac{1}{\alpha}}(z) = -\infty, \quad \lim_{x\to1^+} f_\alpha(x) = -\lim_{z\to1^+} f_{\frac{1}{\alpha}}(z) = -\ln(1/\alpha) = \ln\alpha.$$
Suy ra $I_\alpha = (-\infty, \ln\alpha)$.