HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2018

ĐỀ THI MÔN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng PT

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong chứng minh của câu sau. Nếu một câu được chứng minh không dựa vào kết quả của các câu trước thì có thể dùng để chứng minh các câu trước.

Biến đổi Abel và một số ứng dụng

A. Biến đổi Abel và bất đẳng thức Abel

Trong các bài toán sau đây, ta cho 2 dãy số thực: $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$ $(n \geq 1)$. Đặt $X_k = x_1 + \cdots + x_k, Y_k = y_1 + \cdots + y_k$ $(1 \leq k \leq n)$.

Bài PT.1. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_n Y_n - \left(\sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) Y_k\right) = X_n y_n - \left(\sum_{k=1}^{n-1} (y_{k+1} - y_k) X_k\right).$$

(Tổng trên một tập rỗng được quy ước là có giá trị bằng 0, chẳng hạn khi $n = 0$, biểu thức trong các dấu ngoặc trên đây bằng 0.)

Bài PT.2. Giả sử $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$. Đặt $m = \min_{1 \leq k \leq n} Y_k$ và $M = \max_{1 \leq k \leq n} Y_k$. Chứng minh rằng

$$x_1 m \leq \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq x_1 M.$$

Bài PT.3. Cho dãy số thực $y_1, y_2, \dots, y_n$. Kí hiệu m, M như trong PT.2. Chứng minh rằng

$$m \leq y_1 + \frac{1}{2} y_2 + \cdots + \frac{1}{n} y_n \leq M.$$

(Xem tiếp trang sau)

B. Ứng dụng vào việc tính một số tổng và thiết lập một số đẳng thức

Đặt $H_0 = 0$ và với mỗi số nguyên dương k, đặt $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$.

Bài PT.4. Chứng minh rằng, với mọi số nguyên không âm n, ta có

a) $\sum_{k=0}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$.

b) $\sum_{k=0}^{n} kH_k = \frac{n(n+1)}{2}H_n - \frac{n(n-1)}{4}$.

Bài PT.5. Cho các số nguyên dương $n \geq m$. Đặt $T_{m,n} = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} H_k$; trong đó, $\binom{k}{m}$ là số tổ hợp chập m của k phần tử. Hãy tìm một công thức tính $T_{m,n}$ theo và chỉ theo m, n và H_n.

C. Một số ứng dụng khác

Bài PT.6. Cho dãy số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thoả mãn tính chất $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ với mọi $1 \leq k \leq n$. Chứng minh rằng với mọi dãy số thực $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ ta có

$$n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right).$$

Bài PT.7. a) Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương sao cho $a_1 a_2 \ldots a_n \geq 1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương p ta có

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{p+1} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k^{p}.$$

b) Chứng minh rằng với mọi số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ta có

$$\sqrt{\frac{x_2^3}{x_1^3}} + \sqrt{\frac{x_3^3}{x_2^3}} + \cdots + \sqrt{\frac{x_1^3}{x_n^3}} \geq \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_1}{x_n}.$$

Bài PT.8. Xét các số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sao cho $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$. Tìm giá trị lớn nhất của $\sqrt[3]{a_1} + \sqrt[3]{a_2} + \cdots + \sqrt[3]{a_n}$.

Hết

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*