HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2018

ĐÁP ÁN MÔN: ĐẠI SỐ

Bảng PT

Biến đổi Abel và một số ứng dụng

A. Đẳng thức Abel và bất đẳng thức Abel

Bài PT.1. Ta sẽ chỉ chứng minh đẳng thức đầu tiên, đẳng thức thứ hai nhận được bằng cách hoán đổi vai trò của hai dãy. Do $y_1 = Y_1$ và $y_k = Y_k - Y_{k-1}$ với mọi $k = 2, \dots, n$ nên

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k &= x_1 y_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k (Y_k - Y_{k-1}) = x_1 Y_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k Y_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1} Y_k \\ &= x_n Y_n + \sum_{k=1}^{n-1} x_k Y_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1} Y_k = x_n Y_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) Y_k.\end{aligned}$$

Bài PT.2. Theo PT.1 ta có

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_n Y_n + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(x_k - x_{k+1})}_{\geq 0} \underbrace{Y_k}_{\geq m} \right) \geq x_n m + \left(\sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) m \right) = x_1 m.$$

Bất đẳng thức còn lại là hoàn toàn tương tự.

Bài PT.3. Ta chỉ cần áp dụng PT.2 cho $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, \dots, x_n = \frac{1}{n}$.

B. Ứng dụng vào việc tính một số tổng và thiết lập một số đẳng thức

Bài PT.4. a) Áp dụng PT.1, ta có

 (Xem tiếp trang sau)

$$\sum_{k=0}^{n} H_k = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot H_k = \left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) H_n - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{k} 1\right)(H_{k+1} - H_k)$$
$$= (n+1)H_n - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\frac{1}{k+1} = (n+1)H_n - \sum_{k=0}^{n-1} 1 = (n+1)H_n - n.$$

b) Theo PT.1, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kH_k &= \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) H_n - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{k} i\right)(H_{k+1} - H_k)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}H_n - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}\frac{1}{k+1}\\ &= \frac{n(n+1)}{2}H_n - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k\\ &= \frac{n(n+1)}{2}H_n - \frac{(n-1)n}{4}.\end{aligned}$$

Bài PT.5. Nhận xét rằng, với mọi $k \geq m$, ta có đẳng thức

$$\sum_{i=m}^{k}\binom{i}{m} = \binom{k+1}{m+1}. \tag{1}$$

Thật vậy, (1) được suy ra từ việc cộng, vế theo vế, các đồng nhất thức $\binom{i}{m} = \binom{i+1}{m+1} - \binom{i}{m+1}$, với $i = m, m+1, \ldots, k$ (chú ý quy ước $\binom{i}{j} = 0$ khi $i < j$). Từ đó, theo PT.1 thì

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}H_k = \left(\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\right)H_n - \sum_{k=m}^{n-1}\left(\sum_{i=m}^{k}\binom{i}{m}\right)(H_{k+1} - H_k)$$
$$= \binom{n+1}{m+1}H_n - \sum_{k=m}^{n-1}\binom{k+1}{m+1}\frac{1}{k+1}.$$

Bây giờ, để ý rằng $\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{m+1} = \frac{1}{m+1}\binom{k}{m}$. Suy ra

$$\sum_{k=m}^{n-1}\binom{k+1}{m+1}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{m+1}\sum_{k=m}^{n-1}\binom{k}{m} \underbrace{=}_{\text{do (1)}} \frac{1}{m+1}\binom{n}{m+1}.$$

Từ đó,

$$T_{m,n} = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1} \left(H_n - \frac{n-m}{(n+1)(m+1)} \right).$$

C. Một số ứng dụng khác

Bài PT.6. Ta có, theo PT.1,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = (a_1 + \cdots + a_n) b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_1 + \cdots + a_k)(b_k - b_{k+1}).$$

Do $a_1 + \cdots + a_k \geq \frac{k}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$ và $b_k - b_{k+1} \geq 0$ nên

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &\geq (a_1 + \cdots + a_n) b_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n}(a_1 + \cdots + a_n)(b_k - b_{k+1}) \\ &= \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)(n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} k(b_k - b_{k+1})) \\ &= \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n).\end{aligned}$$

(Đẳng thức cuối cùng đến từ PT.1, áp dụng cho hai dãy $x_1 = \ldots = x_n = 1$ và $y_1 = b_1, y_2 = b_2, \ldots, y_n = b_n$.)

Bài PT.7. a) Không giảm tổng quát, ta có thể giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. Thế thì ta có

$$a_1 \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \cdots \geq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Mặt khác, $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq 1$. Từ đó suy ra $a_1 + \cdots + a_k \geq k$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$.

Cuối cùng, từ PT.2 ta có: nếu $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$ và $y_1 \geq 0, y_1 + y_2 \geq 0, \ldots, y_1 + \cdots + y_n \geq 0$ thì $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geq 0$. Áp dụng cho $x_k = a_k^p, y_k = a_k - 1$ ta nhận được

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^p (a_k - 1) \geq 0.$$

Từ đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

b) Áp dụng câu a) cho $a_k = \sqrt{\frac{x_{k+1}}{x_k}}$ (với quy ước $x_{n+1} = x_1$) và $p = 2$.

(Xem tiếp trang sau)

Bài PT.8. Đặt $b_k = k^3$. Thế thì $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ và $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \le b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ với mọi $1 \le k \le n$. Ta sẽ chỉ ra

$$\sqrt[3]{a_1} + \cdots + \sqrt[3]{a_n} \le \sqrt[3]{b_1} + \cdots + \sqrt[3]{b_n} \tag{2}$$

Nhắc lại rằng, từ PT.2 ta có: nếu $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge 0$ và $y_1 \ge 0, y_1 + y_2 \ge 0, \ldots, y_1 + \cdots + y_n \ge 0$ thì $\sum_{k=1}^n x_k y_k \ge 0$. Áp dụng cho $x_k = \frac{1}{\sqrt[3]{b_k^2}}, y_k = b_k - a_k$ $(1 \le k \le n)$, ta thu được

$$\frac{b_1 - a_1}{\sqrt[3]{b_1^2}} + \cdots + \frac{b_n - a_n}{\sqrt[3]{b_n^2}} \ge 0,$$

hay

$$\frac{a_1}{\sqrt[3]{b_1^2}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt[3]{b_n^2}} \le \sqrt[3]{b_1} + \cdots + \sqrt[3]{b_n}. \tag{3}$$

Bây giờ, ta nhắc lại bất đẳng thức Hölder: Cho $2n$ số thực dương $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n$ và hai số thực dương p, q thoả mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Thế thì, $x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \le \left(x_1^p + \cdots + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(y_1^q + \cdots + y_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$. Áp dụng bất đẳng thức này cho $x_k = \frac{\sqrt[3]{a_k}}{\sqrt[9]{b_k^2}}, y_k = \sqrt[9]{b_k^2}$ $(1 \le k \le n)$, $p = 3, q = \frac{3}{2}$ ta suy ra

$$\sum_{k=1}^n \sqrt[3]{a_k} \le \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sqrt[3]{b_k^2}}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt[3]{b_k}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Kết hợp bất đẳng thức này với (3) ta thu được (2).

Như vậy, ta có $\sqrt[3]{a_1} + \cdots + \sqrt[3]{a_n} \le 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a_k = k^3$ $(1 \le k \le n)$ nên $\frac{n(n+1)}{2}$ chính là giá trị lớn nhất cần tìm.

Hết