KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 30

ĐÀ NẴNG, 8-13/4/2024

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC DUY TÂN

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC DUY TÂN

KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC
SINH VIÊN - HỌC SINH LẦN THỨ 30

Biên tập

Ngô Quốc Anh
Trường ĐH Khoa học Tự nhiên-ĐHQG Hà Nội
Đào Phương Bắc
Trường ĐH Khoa học Tự nhiên-ĐHQG Hà Nội
Đoàn Trung Cường
Hội Toán học Việt Nam & Viện Toán học
Nguyễn Thị Khuyên
Viện Toán học

ĐÀ NẴNG, 8-13/4/2024

GIỚI THIỆU

Kỳ thi Olympic Toán học lần thứ 30 dành cho sinh viên các trường đại học, cao đẳng, học viện và học sinh phổ thông các trường chuyên trong cả nước đã diễn ra tại trường Đại học Duy Tân từ 8-13/4/2024. Quyển kỷ yếu này chủ yếu dành để tập hợp lại một số bài đề xuất của các trường tham dự kỳ thi với mong muốn cung cấp thêm một tài liệu tham khảo cho những người quan tâm. Do thời gian biên tập khá ngắn nên ngoài một số bài được biên tập tương đối kỹ càng, có một số bài chúng tôi giữ nguyên cách trình bày như đề xuất, công tác biên tập trong trường hợp đó là đánh máy lại, kiểm tra tính chính xác về nội dung và chính tả.

Nhóm biên tập

Mục lục

Phần I

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN - HỌC SINH LẦN THỨ 30

Thông tin về kỳ thi

Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên và Học sinh Toàn quốc lần thứ XXX được Hội Toán học Việt Nam phối hợp với Trường Đại học Duy Tân tổ chức trong tháng 3 và tháng 4 năm 2024. Kỳ thi được tổ chức trực tuyến và giám sát tại chỗ đối với khối phổ thông từ 15-17 tháng Ba và được tổ chức trực tiếp đối với khối đại học từ ngày 8-13 tháng Tư năm 2024 tại Trường Đại học Duy Tân – TP. Đà Nẵng. Khối Đại học có 95 trường đại học, học viện tham gia kỳ thi, chiếm khoảng 20% số trường đại học trong cả nước. Có 699 sinh viên với 807 lượt thi các môn Đại số và Giải tích, chia hai bảng A và B. Bảng A có 36 trường tham gia và Bảng B có 59 trường. Đã có gần 200 thầy cô giáo dẫn đoàn có mặt ở Đà Nẵng. Khối Phổ thông có 46 trường THPT với 400 học sinh tham gia.

1. Khối phổ thông

Trong hai ngày 16-17/3, 400 học sinh từ các trường chuyên và trường chất lượng cao trong cả nước đã làm hai bài thi về số học và tổ hợp. Theo truyền thống, đề thi của mỗi ngày thi tập trung vào một chủ đề cụ thể, các bài tập từ đơn giản đến khó. Ban Tổ chức đã mời các giảng viên và một số giáo viên các trường chuyên tham gia chấm thi cho Khối Phổ thông trong hai ngày 24-25/3 với số lượng 800 bài thi. Sau khi có kết quả chấm thi, Ban Tổ chức đã quyết định trao 42 giải Nhất, 59 giải Nhì, 88 giải Ba và 32 giải Khuyến khích cho các em học sinh đạt thành tích cao tại kỳ thi.
Trước kỳ thi Ban Tổ chức đã tổ chức loạt bài giảng về toán phổ thông vào các ngày 2-3/3 và 9-10/3 với 4 bài giảng về các chủ đề trong đại số, hình học, tổ hợp. Phải nói rằng hoạt động này rất thành công, các bài giảng đã thu hút gần 1000 người từ khắp nơi đăng ký tham dự.

1. Võ Quốc Bá Cẩn (Trường THCS Archimedes, Hà Nội), Bất đẳng thức Karamata.

2. Nguyễn Văn Linh (Trường THPT Chuyên Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội), Một bổ đề về cặp điểm liên hợp đẳng giác.

3. Vũ Hồng Sơn (Trường THPT Chuyên Hùng Vương, Phú Thọ), Lý thuyết đồ thị và một số ứng dụng.

4. Nguyễn Xuân Thọ (Đại học Bách Khoa Hà Nội), Một số bài toán về đa thức.

Phần thi dành cho khối phổ thông được tổ chức từ năm 2016 tại kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên-Học sinh ở Quy Nhơn và chuyển sang hình thức online từ năm 2022, ngay sau đại dịch Covid 19. Ở kỳ thi năm nay, hoạt động tổ chức thi cho khối phổ thông tiếp tục được hỗ trợ về cơ sở vật chất từ Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội.

Học sinh được trao huy chương vàng tại Đà Nẵng. Nguồn: Trường ĐH Duy Tân

2. Khối đại học

Đối với công tác ra đề thi của khối đại học, một phần nguồn đề được đóng góp từ đề xuất của các đoàn. Các bài đề xuất được dùng làm nguồn cho đề thi chính thức và được biên tập trong quyển kỷ yếu của kỳ thi, làm tài liệu tham khảo cho các thầy cô và các em học sinh, sinh viên.

Ngay sau khi các thí sinh thi xong môn Đại số vào chiều ngày 9/4, Ban Tổ chức đã tổ chức chấm xong ngay trong tối 9/4. Tương tự, môn Giải tích được chấm trong buổi chiều 10/4, tổng số lượng bài thi cả hai môn cũng xấp xỉ 800 bài. Có 80 đoàn đã đăng ký cử đại diện tham gia chấm thi.

Sau khi có kết quả thi và kết quả phúc tra, Ban Tổ chức đã họp với tất cả trưởng đoàn và thống nhất các mức điểm để xét giải Nhất, Nhì, Ba. Với số lượng xấp xỉ 400 thí sinh mỗi môn, Ban Tổ chức đã quyết định trao số lượng giải như sau.

Bảng A:
Môn Đại số có 90 giải chính thức, trong đó có 16 giải Nhất, 33 giải Nhì và 41 giải Ba.
Môn Giải tích có 93 giải chính thức, trong đó có 17 giải Nhất, 32 giải Nhì và 44 giải Ba.
Bảng B:
Môn Đại số có 111 giải chính thức, trong đó có 20 giải Nhất, 39 giải Nhì và 52 giải Ba.
Môn Giải tích có 109 giải chính thức, trong đó có 20 giải Nhất, 40 giải Nhì và 49 giải Ba.
Tổng cộng, môn Đại số có 36 giải Nhất, 72 giải nhì và 93 giải Ba. Môn Giải tích có 37 giải Nhất, 72 giải Nhì và 93 giải Ba. Ban Tổ chức cũng trao 21 giải khuyến khích cho các thí sinh thi môn Đại số và 20 giải khuyến khích cho các thí sinh thi môn Giải tích.
Trong những thí sinh đạt giải nhất ở các môn có 11 thí sinh có thành tích đặc biệt là thủ khoa một môn trong từng bảng hoặc đạt giải nhất cả hai môn Đại số và Giải tích, hoặc cả hai. Trong số đó có một thí sinh nữ và đều các trường là đại diện cả ba miền đất nước. Danh sách cụ thể như sau:

1. Hoàng Tuấn Dũng, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội, Thủ khoa môn Giải tích bảng A, Đạt giải Nhất 2 môn

2. Nguyễn Công Thành, Trường Đại học Fulbright Việt Nam, Thủ khoa môn Giải tích bảng B, Đạt giải Nhất 2 môn

3. Bùi Khánh Vĩnh, Trường Đại học Bách khoa - Đại học Quốc gia Tp. HCM, Thủ khoa môn Đại số bảng A, Đạt giải Nhất 2 môn

4. Nguyễn Văn Tú, Học viện Quân y, Thủ khoa môn Đại số bảng B

5. Mai Quốc Anh, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội Đạt giải Nhất 2 môn

6. Nguyễn Lê Duy, Trường Đại học Phạm Văn Đồng, Đạt giải Nhất 2 môn

7. Trần Ngọc Quỳnh Giang, Trường Đại học Ngoại thương CS 2, Đạt giải Nhất 2 môn

8. Nguyễn Anh Huy, Trường Đại học Ngoại thương CS 2, Đạt giải Nhất 2 môn

9. Nguyễn Đình Tuấn Minh, Đại học Bách khoa Hà Nội, Đạt giải Nhất 2 môn

10. Võ Văn Thành, Trường Đại học Nha Trang, Đạt giải Nhất 2 môn

11. Đặng Việt Tỉnh, Trường Đại học Khánh Hòa, Đạt giải Nhất 2 môn

Các thí sinh có thành tích xuất sắc được trao bằng khen của Hội Toán học Việt Nam và Hội Sinh viên Việt Nam. Nguồn: Trường ĐH Duy Tân

Một số đoàn có thành tích cao trong kỳ thi lần này là
Bảng A: ĐH Bách Khoa Hà Nội, Trường Đại học Bách Khoa - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh, Trường ĐH Khoa học Tự nhiên - ĐHQG Hà Nội.
Bảng B: Trường ĐH Ngoại thương Cơ sở 2, Học Viện Quân Y, Trường ĐH Hùng Vương - Phú Thọ.
Trong lễ tổng kết của kỳ thi, Ban Tổ chức cũng trao bằng khen của Chủ tịch Hội Toán học cho 11 thầy cô giáo có nhiều đóng góp trong phong trào Olympic Toán học Sinh viên giai đoạn 2018-2024:

1. Dư Thị Hòa Bình - Trường Đại học Hà Nội
2. Lê Phê Đô - Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội
3. Đặng Đình Hanh - Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội
4. Trần Vĩnh Linh - Trường Đại học Fulbright Việt Nam
5. Hy Đức Mạnh - Học viện Kỹ thuật Quân sự

6. Trần Hoài Ngọc Nhân - Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long
7. Trương Thị Nhạn - Học viện Hải quân
8. Trần Thanh Phong - Trường Đại học Thủ Dầu Một
9. Nguyễn Hữu Thọ - Trường Đại học Thủy lợi Hà Nội
10. Dương Việt Thông - Trường Đại học Kinh tế quốc dân
11. Bùi Anh Tuấn - Trường Đại học Cần Thơ

Hội Toán học trao bằng khen cho các thầy cô có nhiều đóng góp trong phòng trao Olympic Toán học Sinh viên giai đoạn 2018-2024. Nguồn: Trường ĐH Duy Tân

Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên-Học sinh Toàn quốc lần thứ XXXI năm 2025 sẽ được tổ chức tại Đại học Sài Gòn.

Phần II

ĐỀ THI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 Đại số

1.1 Bảng A

BÀI 1. Cho a là một số thực, A là ma trận phụ thuộc vào a:

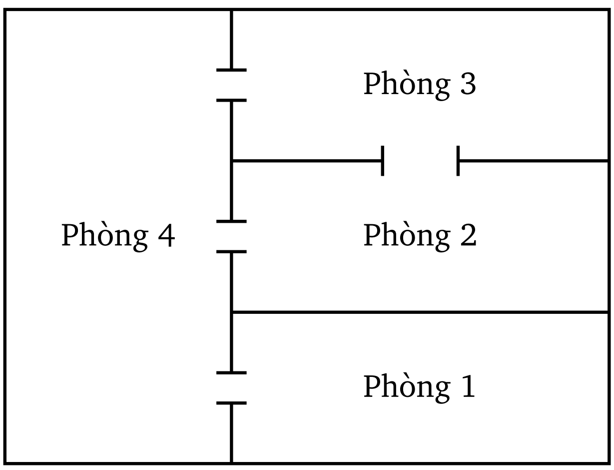
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a+2 & 0 \\ a+3 & 1 & 0 & a+2 \\ a+2 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm hạng của ma trận A khi $a = -1$.

(b) Tìm tất cả các số thực a sao cho A có định thức dương.

(c) Biện luận số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$ theo a. (Ở đây, X là vectơ cột với các tọa độ lần lượt là x, y, z, t.)

BÀI 2. Có 200 con muỗi trong một căn hộ gồm 4 phòng với hệ thống cửa nối các phòng như hình vẽ.



Biết rằng, mỗi phút, mỗi con muỗi chỉ ở lại trong phòng nó đang ở hoặc bay sang một phòng bên cạnh. Ngoài ra, người ta thống kê được rằng, với mỗi phòng, có 40% số muỗi ở lại phòng đó, còn trong số muỗi bay ra khỏi phòng thì số lượng muỗi bay sang mỗi phòng bên cạnh đó là bằng nhau. Chẳng hạn, trong số các con muỗi bay từ phòng 3 sang phòng khác, thì có một nửa sang phòng 2, một nửa sang phòng 4.

(a) Giả sử sau một phút số muỗi ở các phòng 1, phòng 2, phòng 3 và phòng 4 tương ứng là 24, 50, 52 và 74. Tìm số muỗi ở mỗi phòng tại thời điểm ban đầu.

(b) Gọi trạng thái *ổn định* là trạng thái mà kể từ đó trở đi số muỗi ở mỗi phòng đều không đổi. Tìm số lượng muỗi tương ứng của mỗi phòng tại trạng thái ổn định đó.

BÀI 3. Cho $P(x)$ là một đa thức với hệ số thực thỏa mãn $(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$.

(a) Chứng minh rằng $P(x)$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt.

(b) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện trên.

BÀI 4. Với x, y, z là các số thực, đặt

$$A(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm một không gian con V của $\mathbb{R}^3$ với $\dim(V) = 2$ thỏa mãn $A(x,y,z) = 0$ với mọi $(x,y,z) \in V$. Tìm một cơ sở của không gian V vừa tìm được.

(b) Tồn tại hay không các số nguyên x, y, z sao cho $A(x,y,z) = 24$?

BÀI 5. Cặp ma trận thực, vuông cùng cấp (A,B), được gọi là tốt nếu cả hai đều khả nghịch, và thỏa mãn $AB - BA = B^2A$.

(a) Chứng minh rằng nếu (A,B) là một cặp ma trận tốt, thì

$$B = A^{-1}\left(B^2 + B\right)A.$$

(b) Tìm một cặp ma trận tốt (A,B) với cấp của mỗi ma trận đều bằng 2.

(c) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại ít nhất một cặp ma trận tốt (A,B) với cấp của mỗi ma trận đều bằng n.

1.2 Bảng B

BÀI 1. Cho a là một số thực, A là ma trận phụ thuộc vào a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a+2 & 0 \\ a+3 & 1 & 0 & a+2 \\ a+2 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm hạng của ma trận A khi $a = -1$.

(b) Tìm tất cả các số thực a sao cho A có định thức dương.

(c) Biện luận số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$ theo a. (Ở đây, X là vectơ cột với các tọa độ lần lượt là x, y, z, t.)

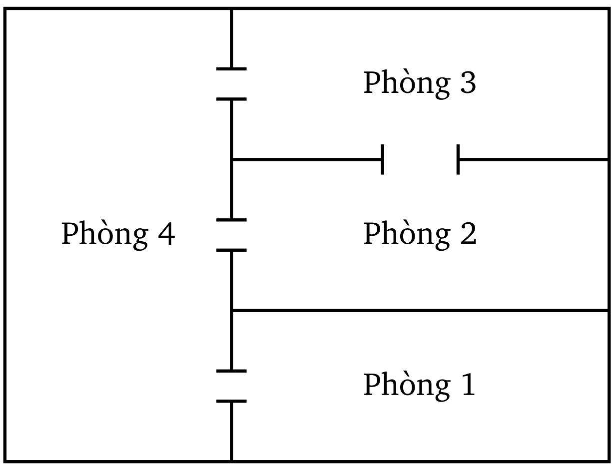
BÀI 2. Cho A, B là hai ma trận vuông sau:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm một ma trận thực P có cấp bằng 2, sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo.

(b) Tìm một ma trận thực R có cấp bằng 2, định thức bằng 1, sao cho $R^{-1}AR = B$.

BÀI 3. Có 200 con muỗi trong một căn hộ gồm 4 phòng với hệ thống cửa nối các phòng như hình vẽ.



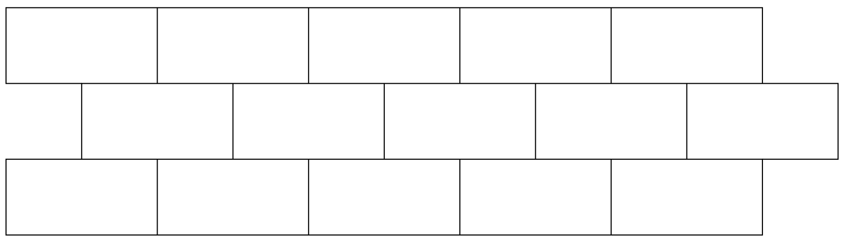
Biết rằng, mỗi phút, mỗi con muỗi chỉ ở lại trong phòng nó đang ở hoặc bay sang một phòng bên cạnh. Ngoài ra, người ta thống kê được rằng, với mỗi phòng, có 40% số muỗi ở lại phòng đó, còn trong số muỗi bay ra khỏi phòng thì số lượng muỗi bay sang mỗi phòng bên cạnh đó là bằng nhau. Chẳng hạn, trong số các con muỗi bay từ phòng 3 sang phòng khác, thì có một nửa sang phòng 2, một nửa sang phòng 4.

(a) Giả sử sau một phút số muỗi ở các phòng 1, phòng 2, phòng 3 và phòng 4 tương ứng là 24, 50, 52 và 74. Tìm số muỗi ở mỗi phòng tại thời điểm ban đầu.

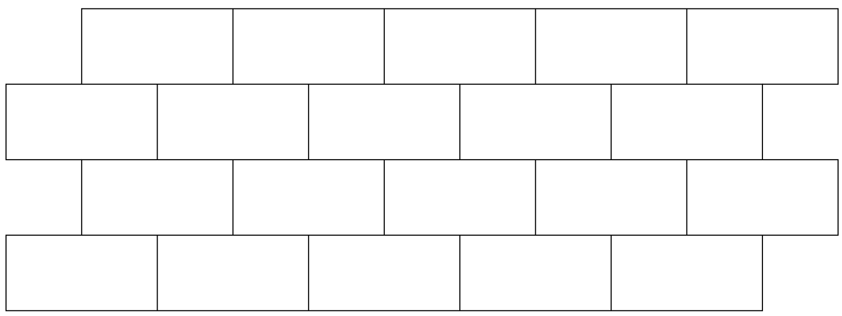
(b) Gọi trạng thái *ổn định* là trạng thái mà kể từ đó trở đi số muỗi ở mỗi phòng đều không đổi. Tìm số lượng muỗi tương ứng của mỗi phòng tại trạng thái ổn định đó.

BÀI 4.

(a) Có bao nhiêu cách chọn ra 3 viên gạch, mỗi viên từ một hàng trong hình sau đây, sao cho không có 2 viên gạch nào được lấy ra nằm kề nhau? (Hai viên gạch được gọi là kề nhau nếu có chung một phần của một cạnh.)



(b) Có bao nhiêu cách chọn ra 4 viên gạch, mỗi viên từ một hàng trong hình sau đây, sao cho không có 2 viên gạch nào được lấy ra nằm kề nhau?



BÀI 5. Với x, y, z là các số thực, đặt

$$A(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm một không gian con V của $\mathbb{R}^3$ với $\dim(V) = 2$ thỏa mãn $A(x,y,z) = 0$ với mọi $(x,y,z) \in V$. Tìm một cơ sở của không gian V vừa tìm được.

(b) Tồn tại hay không các số nguyên x, y, z sao cho $A(x,y,z) = 24$?

2 Giải tích

2.1 Bảng A

BÀI 1. Cho $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số thực được xác định bởi các điều kiện

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^n}{n!} \quad \forall n \geq 1.$$

(a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $a_n \geq 1/2$.

(b) Chứng minh rằng dãy số (a_n) hội tụ.

(c) Giới hạn của dãy số (a_n) là một số hữu tỉ hay vô tỉ? Vì sao?

BÀI 2. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{nếu } x \leq 0, \\ e^x + cx & \text{nếu } x > 0, \end{cases}$$

trong đó a, b, và c là các tham số thực.

(a) Xác định a, b, và c sao cho hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$.

(b) Xác định a, b, và c sao cho hàm f khả vi trên $\mathbb{R}$.

(c) Xác định a, b, và c sao cho hàm f khả vi cấp hai trên $\mathbb{R}$.

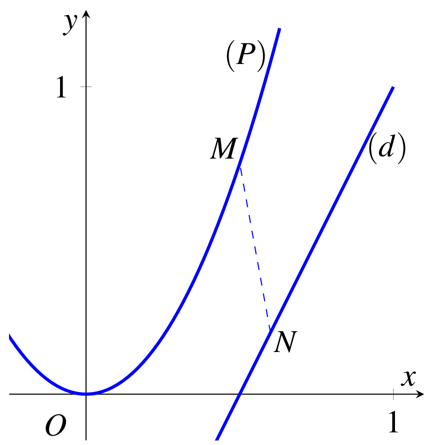
BÀI 3.
Hình vẽ bên thể hiện một phần đường thẳng (d) có phương trình

$$y = 2x - 1$$

và một phần parabol (P) có phương trình

$$y = 3x^2$$

trong mặt phẳng tọa độ Oxy.



(a) Đường thẳng (d) và parabol (P) có cắt nhau không? Vì sao?

(b) Cho các điểm $M \in (P)$ và $N \in (d)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách MN.

BÀI 4. Gọi $\mathscr{F}$ là lớp tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có

$$|f''(x)| \leq 1 \quad \text{với mọi } x.$$

Hàm f được gọi là có tính chất SAT nếu f thuộc $\mathscr{F}$ và

$$\left(f'(x)\right)^2 \leq 2024|f(x)| \quad \text{với mọi } x.$$

(a) Chứng minh rằng nếu f là một hàm số thuộc lớp $\mathscr{F}$ và $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì f có tính chất SAT.

(b) Tìm một hàm số f thuộc lớp $\mathscr{F}$ nhưng f không có tính chất SAT.

BÀI 5. Cho $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi sao cho giới hạn

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f^2(t)dt$$

tồn tại và hữu hạn.

(a) Cho một ví dụ về hàm số f thỏa mãn tất cả các yêu cầu trên.

(b) Chứng minh rằng nếu f' bị chặn trên $[0, +\infty)$ thì

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

(c) Khẳng định trong ý (b) có còn đúng không nếu ta không giả thiết f' bị chặn trên $[0, +\infty)$? (Nếu câu trả lời là “có”, hãy chứng minh; nếu câu trả lời là “không”, hãy chỉ ra ví dụ về một hàm f.)

2.2 Bảng B

BÀI 1. Cho $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số thực được xác định bởi các điều kiện

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^n}{n!} \quad \forall n \geq 1.$$

(a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $a_n \geq 1/2$.

(b) Chứng minh rằng dãy số (a_n) hội tụ.

BÀI 2. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{nếu } x \leq 0, \\ e^x + cx & \text{nếu } x > 0, \end{cases}$$

trong đó a, b, và c là các tham số thực.

(a) Xác định a, b, và c sao cho hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$.

(b) Xác định a, b, và c sao cho hàm f khả vi trên $\mathbb{R}$.

(c) Xác định a, b, và c sao cho hàm f khả vi cấp hai trên $\mathbb{R}$.

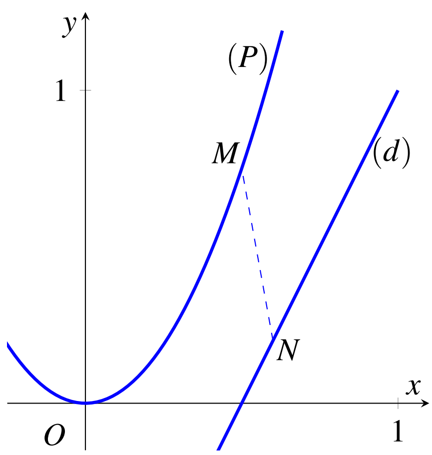
BÀI 3.
Hình vẽ bên thể hiện một phần đường thẳng (d) có phương trình

$$y = 2x - 1$$

và một phần parabol (P) có phương trình

$$y = 3x^2$$

trong mặt phẳng tọa độ Oxy.



(a) Đường thẳng (d) và parabol (P) có cắt nhau không? Vì sao?

(b) Cho các điểm $M \in (P)$ và $N \in (d)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách MN.

BÀI 4. Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục trên $[0, 1]$ và khả vi trong $(0, 1)$.

(a) Chứng minh rằng nếu $f(1) = 0$ thì tồn tại một số thực $x_0 \in (0,1)$ sao cho

$$|f(x_0)| \leq 2024|f'(x_0)|.$$

(b) Chứng minh rằng nếu $f(1) = 0$ và

$$|f(x)| \geq 2024|f'(x)| \quad \text{với mọi } x \in (0,1)$$

thì f là hàm hằng.

(c) Khẳng định trong ý (b) có còn đúng không nếu ta không giả thiết $f(1) = 0$? (Nếu câu trả lời là "có", hãy chứng minh; nếu câu trả lời là "không", hãy chỉ ra ví dụ về một hàm số f.)

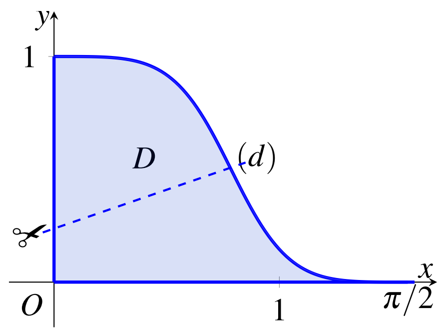
BÀI 5.

Cho D là một phần của mặt phẳng tọa độ Oxy gồm những điểm có tọa độ $(x;y)$ mà

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

và

$$0 \leq y \leq \frac{(\cos x)^4}{(\sin x)^4 + (\cos x)^4} \quad \text{với } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$



(Tham khảo hình vẽ bên.)

(a) Tính diện tích của D.

(b) Cho (d) là một đường thẳng đi qua hai điểm $(\pi/4;1/2)$ và $(0;a)$ với $0 < a < 1$. Người ta muốn cắt D dọc theo (d) để thu được hai phần rời nhau có cùng diện tích. (Hình vẽ trong bài thể hiện một cách cắt dọc theo đường nét đứt.) Coi việc cắt không làm ảnh hưởng đến diện tích của D. Xác định giá trị của a tương ứng với một cách cắt thỏa mãn yêu cầu.

3 Trung học phổ thông

3.1 Ngày thứ nhất: Số học

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong lời giải của câu sau. Nếu một câu được giải mà không dựa vào kết quả của các câu trước thì có thể dùng để giải các câu trước.

A. Các kết quả cơ bản về dãy số Fibonacci và Lucas

Dãy số Fibonacci $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ được xác định như sau:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{với mọi } n \geq 0.$$

Dãy số Lucas $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ được xác định như sau:

$$L_0 = 2, L_1 = 1, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \quad \text{với mọi } n \geq 0.$$

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có:
a) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$;
b) $L_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có:

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n.$$

Bài 3. a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $m \geq n$ ta có

$$F_m = F_n F_{m-n+1} + F_{n-1} F_{m-n}.$$

b) Với hai số tự nhiên a và b không đồng thời bằng 0, ta ký hiệu (a,b) là ước chung lớn nhất của a và b. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m,n, ta có

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}.$$

c) Biết rằng F_n là số nguyên tố. Chứng minh rằng $n = 4$ hoặc n là một số nguyên tố.

Bài 4. Chứng minh rằng, với mọi số tự nhiên n, ta có:
a) $L_n^2 - 5F_n^2 = (-1)^n 4$.
b) $F_{2n} = F_n \cdot L_n$.
c) Hơn nữa, nếu n không chia hết cho 3, thì F_n và L_n nguyên tố cùng nhau.

Bài 5. Ký hiệu $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{2^i}$, với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng:
a) $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}S_{n-1} + \frac{1}{4}S_{n-2}$, với mọi số nguyên $n \geq 3$.
b) $S_n < 2$ với mọi số nguyên dương n.

B. Một số tính chất khác của dãy số Fibonacci và Lucas

BÀI 6. Ta gọi một dãy vô hạn các số nguyên dương $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là $F-$dãy nếu $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Có thể phân hoạch tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ thành hợp của hữu hạn $F-$dãy hay không? Giải thích vì sao.

BÀI 7. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (k,m) với $m > k$, sao cho dãy $\{x_n\}$ được xác định như sau chứa một số hạng bằng 1 :

$$x_1 = \frac{F_k}{F_m} \quad \text{và} \quad x_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{2x_n - 1}{1 - x_n}, \text{ nếu } x_n \neq 1, \\ 1, \quad \text{nếu } x_n = 1. \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

BÀI 8. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m, tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho

$$m \,|\, (F_n^4 - F_n - 2).$$

BÀI 9. Bạn Thịnh chọn một số trong tập $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Bạn Vượng muốn biết số mà bạn Thịnh chọn nên hai bạn chơi một trò chơi như sau: bạn Vượng lấy một tập con M của tập $\{1, 2, \ldots, 100\}$ rồi hỏi bạn Thịnh tập M có chứa số đã chọn hay không. Nếu câu trả lời là có, bạn Vượng sẽ đưa cho bạn Thịnh 20.000 đồng. Nếu câu trả lời là không, bạn Vượng sẽ chỉ phải đưa cho bạn Thịnh 10.000 đồng. Hỏi bạn Vượng cần có ít nhất bao nhiêu tiền để chắc chắn biết được số bạn Thịnh đã chọn?

BÀI 10. Cho số nguyên dương a. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để a xuất hiện trong dãy số Lucas là tồn tại một số nguyên dương b sao cho $|a^2 - ab - b^2| = 5$.

3.2 Ngày thứ hai: Tổ hợp

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong lời giải của câu sau. Nếu một câu được giải mà không dựa vào kết quả của các câu trước thì có thể dùng để giải các câu trước.

A. Ước lượng số cặp điểm có khoảng cách 1 trên mặt phẳng.

Cho số nguyên dương n. Với một tập n điểm $\mathscr{P}_n$ **trong mặt phẳng**, ta ký hiệu $f(\mathscr{P}_n)$ số các cặp điểm trong $\mathscr{P}_n$ có khoảng cách bằng 1. Bên cạnh đó, ta ký hiệu $f(n)$ là giá trị lớn nhất của $f(\mathscr{P}_n)$, trong đó $\mathscr{P}_n$ chạy trên tập hợp tất cả các tập hợp gồm n điểm của mặt phẳng.
Hơn nữa, với một tập hợp X, ta ký hiệu $|X|$ là số phần tử của tập hợp đó.

BÀI 1. Cho $\mathscr{P} = \{(x;y) \in \mathbb{N}^2 | 0 \le x;y \le 10\}$. Tính $|\mathscr{P}|$ và $f(\mathscr{P})$.

BÀI 2. Xác định giá trị của $f(4)$.

BÀI 3. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho $f(n) > 2n$ với mọi số nguyên $n > n_0$.

BÀI 4. Chứng minh rằng với mọi số thực dương c, tồn tại số nguyên dương n sao cho $f(n) > cn$.

BÀI 5. Cho số nguyên dương n và một tập $\mathscr{P}_n$ gồm n điểm trong mặt phẳng. Với mỗi điểm $X \in \mathscr{P}_n$, ta gọi $d(X)$ là số các điểm M thuộc $\mathscr{P}_n$ có khoảng cách bằng 1 tới X. Xét T là tập hợp các bộ ba điểm sắp thứ tự (A,B,C) với A,B,C là các điểm phân biệt thuộc $\mathscr{P}_n$ và $AC = BC = 1$. Chứng minh rằng

a) $|T| \le 2n(n-1)$.

b) $|T| = \sum_{X \in \mathscr{P}_n} d(X)(d(X)-1)$.

c) $\sum_{X \in \mathscr{P}_n} d(X) \le 2f(n)$.

BÀI 6. Chứng minh rằng tồn tại hằng số c sao cho $f(n) < cn^{3/2}$ với mọi số nguyên dương n.

B. Ước lượng số cặp điểm có khoảng cách 1 trong các tập đặc biệt.

Ta gọi một tập điểm là **rộng rãi** nếu khoảng cách giữa 2 điểm bất kì đều có khoảng cách lớn hơn hoặc bằng 1; một tập điểm là **chật chội** nếu khoảng cách giữa 2 điểm bất kì nhỏ hơn hoặc bằng 1.
Ngoài ra, ta ký hiệu $f^{rr}(n)$ (tương ứng $f^{cc}(n)$) là giá trị lớn nhất của $f(\mathscr{P}_n)$ khi $\mathscr{P}_n$ chạy trên tất cả các tập rộng rãi (tương ứng là các tập chật chội) gồm n điểm **trong mặt phẳng**.

BÀI 7. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f^{rr}(n)}{n} = 3.$$

(Nói cách khác, với mọi số thực $\varepsilon > 0$, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho với mọi số nguyên $n \ge n_0$, ta có $3 - \varepsilon < \frac{f^{rr}(n)}{n} < 3 + \varepsilon$.)

BÀI 8. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \ge 3$, ta có

$$f^{cc}(n) = n.$$

C. Ước lượng số cặp điểm có khoảng cách 1 trong không gian.

Cho số nguyên dương n. Với một tập $\mathscr{Q}_n$ gồm n điểm **trong không gian**, ta ký hiệu $F(\mathscr{Q}_n)$ là số các cặp điểm trong $\mathscr{Q}_n$ có khoảng cách bằng 1. Ký hiệu $F(n)$ là giá trị lớn nhất của $F(\mathscr{Q}_n)$ khi $\mathscr{Q}_n$ chạy trên tất cả các tập gồm n điểm trong không gian.

BÀI 9. Chứng minh rằng tồn tại các hằng số dương c_1, c_2 sao cho

$$c_1 n^{4/3} \leq F(n) \leq c_2 n^{5/3}$$

với mọi số nguyên dương n.

BÀI 10. Cho số nguyên dương n. Với một tập **rộng rãi** n điểm $\mathscr{R}_n = \{A_1; A_2; \ldots; A_n\}$ **trên mặt phẳng**, ta ký hiệu $T(\mathscr{R}_n)$ là số các cặp điểm (không tính thứ tự) $\{A_i; A_j\}$ thỏa mãn $2023 < A_iA_j < 2024$. Ký hiệu $T(n)$ là giá trị lớn nhất của $T(\mathscr{R}_n)$ khi $\mathscr{R}_n$ chạy trên tất cả các tập rộng rãi n điểm trên mặt phẳng. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho

$$T_n \leq \frac{n^2}{4}$$

với mọi $n > n_0$.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

1 MA TRẬN

Bài 1.1 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.** Cho A, B là các ma trận vuông thỏa mãn $A^{2024} = B^{2023} = I$ và $AB = BA$. Chứng minh rằng $A + B + I$ khả nghịch.

Bài 1.2 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.** Cho $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ và đặt các ma trận khối

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}; N = \begin{bmatrix} A+B & 0_n \\ 0_n & A-B \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} A+iB & 0_n \\ 0_n & A-iB \end{bmatrix}$$

với $i^2 = -1$. Chứng minh rằng M đồng dạng với N và P đồng dạng với Q.

Bài 1.3 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.** Tìm tất cả các số thực a, b thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Bài 1.4 (ĐH Giao thông Vận tải)**.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Tính A^{2024}.

Bài 1.5 (ĐH Đồng Tháp)**.** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 1.6 (ĐH Tân Trào)**.** Tính tổng S các phần tử trên đường chéo chính của ma trận A^n, trong đó $1 \leq n \in \mathbb{N}$ và

$$A = \begin{bmatrix} 44 & -25 & 10 \\ 25 & -11 & 15 \\ 30 & -45 & 44 \end{bmatrix}.$$

2 ĐỊNH THỨC

Bài 2.1 (ĐH Mỏ-Địa chất). Tính định thức cấp 2022 có phần tử tổng quát $a_{ij}\,(i,j=1,2,\dots 2022)$ là số lượng các ước của ước chung lớn nhất của hai số i,j.

Bài 2.2 (ĐH Đồng Tháp). Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1 và $a_0,a_1,\dots,a_n$ là các số thực khác không. Chứng minh rằng

$$a_n+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_0}}}}=\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

với

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ -1 & a_1 & 1 & \dots & 0\\ . & . & . & . & .\\ 0 & \dots & -1 & a_{n-1} & 1\\ 0 & 0 & \dots & -1 & a_n\end{vmatrix}$$

Bài 2.3 (ĐH Tân Trào). Tính giá trị định thức

$$D=\begin{vmatrix} 2024 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 2023 & 2024 & 2 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2022 & 2024 & \cdots & 0 & 0\\ . & . & . & \cdots & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2024 & 2023\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2024\end{vmatrix}.$$

Bài 2.4 (ĐH Vinh). Cho ma trận A vuông cấp 2024 có các phần tử trên đường chéo chính đều là 2024, các phần tử còn lại là 2023 hoặc -2023. Chứng minh rằng ma trận A khả nghịch.

Bài 2.5 (ĐH Hải Phòng). Biện luận hạng của ma trận sau theo x:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & x+1 & x+2 & 0\\ x+3 & 1 & 0 & x+2\\ x+2 & 0 & 1 & x+1\\ 0 & x+2 & x+3 & 1\end{bmatrix}.$$

Bài 2.6 (ĐH Trà Vinh). Cho $A\in M_n(\mathbb{K})$. Chứng minh rằng

(a) Nếu $A^{-1}=A$ thì $|\det(I-A)|(|\det(I-A)|-2^n)=0$.

(b) Nếu $A^{-1} = 4A$ thì $|\det(A^{2k+1} - A)| = \left(\dfrac{4^k - 1}{2^{2k+1}}\right)^n$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Bài 2.7 (ĐH Trà Vinh). Giả sử có các số tự nhiên mà mỗi số gồm ba chữ số dạng $a_1a_2a_3$, $b_1b_2b_3$, $c_1c_2c_3$ đều chia hết cho 13. Chứng minh rằng định thức

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

chia hết cho 13.

3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 3.1 (Đại học Đồng Tháp). Một công ty kinh doanh cây cảnh ở Làng hoa Sa đéc tổng kết hoạt động bốn tháng đầu năm như sau: Trong mỗi tháng công ty trồng thêm 10% tổng số cây xanh hiện có trong tháng trước, đồng thời bán ra được một số cây xanh. Cụ thể trong tháng thứ nhất bán được 100 cây, tháng thứ hai bán được 200 cây, tháng thứ ba bán được 90 cây, tháng cuối cùng bán được 40 cây. Sau bốn tháng, tổng số cây hiện tại trong công ty đã giảm 50 cây so với trước. Hỏi hiện nay công ty có bao nhiêu cây xanh?

Bài 3.2 (Đại học Giao thông Vận tải). Một cửa hàng bán ba loại sản phẩm A, B, C với giá của mỗi sản phẩm là cố định. Có 4 khách hàng đến mua hàng. Số lượng sản phẩm A, B, C mà người thứ hai đã mua tương ứng bằng 1,5 lần, 0,75 lần và 2 lần số sản phẩm người thứ nhất đã mua. Người thứ ba mua một nửa số sản phẩm A mà người thứ nhất đã mua, mua gấp 3 lần số sản phẩm B mà người thứ 2 đã mua và mua số sản phẩm C bằng đúng số lượng sản phẩm C của hai người mua trước cộng lại. Người thứ tư mua 15 sản phẩm A, 30 sản phẩm B và 10 sản phẩm C. Tổng số sản phẩm người thứ nhất mua là 40 và phải trả một số tiền ít hơn người thứ hai 420.000 đồng và cũng ít hơn người thứ ba 1.500.000 đồng. Người thứ tư phải trả số tiền nhiều hơn người thứ hai là 660.000 đồng. Tổng số sản phẩm người thứ 2 mua là 55 và tổng số sản phẩm người thứ 3 mua là 61. Tính số tiền người thứ nhất phải trả khi mua hàng.

4 KHÔNG GIAN VÉCTƠ

Bài 4.1 (Đại học Giao thông Vận tải). Cho M, N, P là ba không gian con phân biệt của không gian tuyến tính $\mathbb{R}^{2024}$ với

$$\dim M = \dim N = \dim P = 2023.$$

(a) Chứng minh rằng $\dim(M \cap N) = 2022$.

(b) Chứng minh rằng nếu $(M \cap N) \neq (N \cap P)$ thì $\dim(M \cap N \cap P) = 2021$.

Bài 4.2 (ĐH Mỏ-Địa chất). Cho các véc tơ trên mặt phẳng u, w, z có độ dài bằng 1. Chứng minh rằng có thể chọn các dấu $+, -$ sao cho $|\pm u \pm w \pm z| \leq 1$.

Bài 4.3 (ĐH Hải Phòng). Kí hiệu V là không gian véctơ các đa thức với hệ số thực gồm đa thức không và các đa thức có bậc không lớn hơn 2. Cho ánh xạ tuyến tính $\varphi : V \to V$ xác định bởi:

$$p(x) \mapsto \varphi(p(x)) = (x - \lambda)(x + 1)p'(x) - 2xp(x),$$

với $\lambda \in \mathbb{R}$ là tham số. Ký hiệu $p'(x)$ là đạo hàm của đa thức $p(x)$.

(a) Với $\lambda = 0$, hãy:

- Tìm số chiều và cơ sở của một không gian hạt nhân $\operatorname{Ker} \varphi$;
- Tìm số chiều và cơ sở của một không gian ảnh $\operatorname{Im} \varphi$;

(b) Với giá trị nào của λ thì φ là một đẳng cấu?

Bài 4.4 (ĐH Trà Vinh). Gọi $C[a,b]$ là tập hợp tất cả các hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$. Định nghĩa các phép toán trên $C[a,b]$ như sau

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t),$$
$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$$

với mọi $t \in [a,b]$. Khi đó $C[a,b]$ là một không gian véctơ trên $\mathbb{R}$.

(a) Chứng minh rằng tập các hàm khả vi trên $[a,b]$ thỏa mãn $f' + 4f = 0$ tạo thành một không gian véctơ con của $C[a,b]$.

(b) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian này.

5 GIÁ TRỊ RIÊNG

Bài 5.1 (ĐH Tân Trào). Hãy tìm một ma trận Y và một ma trận đường chéo D, sao cho $XY = YD$, trong đó

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix};\ D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},\ abc \neq 0, Y \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bài 5.2 (ĐH Vinh)**.** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -9 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm tất cả các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận A.

(b) Xác định tất cả các phần tử của ma trận A^{2024}.

(c) Tìm tất cả các phần tử của ma trận e^A, trong đó ký hiệu $e^A = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k$ (ở đây ma trận giới hạn có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của ma trận tổng $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k$).

Bài 5.3 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.** Cho ánh xạ $\varphi : P_2[x] \to P_2[x]$ xác định như sau: với mọi $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, ta có

$$\varphi(p(x)) = (7a_0 - 12a_1 - 2a_2) + (3a_0 - 4a_1)x - (2a_0 + 2a_2)x^2$$

(a) Chứng tỏ rằng φ là một toán tử tuyến tính; xác định ma trận A tương ứng của φ đối với cơ sở $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$.

(b) Tìm giá trị riêng, véc tơ riêng của A và xét xem A có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy chéo hóa A và tìm ma trận chuyển T cùng với ma trận T^{-1} tương ứng, sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận đường chéo.

(c) Cho $p(x) = -1 - 2x + 3x^2$. Hãy xác định $\varphi^{2024}(p(x))$.

Bài 5.4 (ĐH Ngoại Thương)**.** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của ma trận A.

(b) Tìm các giá trị riêng của ma trận $20A^5 - 2A^2 + 4I$.

Bài 5.5 (ĐH Trà Vinh)**.** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ma trận A có chéo hóa được trên $\mathbb{R}$ hay không? Nếu chéo hóa được thì chỉ ra ma trận khả nghịch P thỏa mãn $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo rồi tính A^{2024} bằng hai phép toán nhân ma trận.

6 ĐA THỨC

Bài 6.1 (ĐH Giao thông Vận tải)**.** Cho $P(x)$ là một đa thức bậc 2022 với hệ số thực. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất đa thức $Q(x)$ có hệ số thực và thỏa mãn 3 điều kiện sau:

(i) $Q(x)$ là đa thức bậc 2024.

(ii) $P(x) = Q(x+1) + Q(x-1) - 2Q(x) + 7Q''(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(iii) $Q(x)$ nhận số phức $x = 2 + \sqrt{7}\,i$ là một nghiệm.

Bài 6.2 (ĐH Vinh)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x).P(2024x^4) = P(x^{2024} + 8x^4) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.3 (ĐH Vinh)**.** Giả sử đa thức $P(x)$ hệ số thực và không có nghiệm thực. Chứng minh rằng

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(2n)}(x)}{(2n)!}$$

cũng là một đa thức không có nghiệm thực, trong đó $P^{(k)}(x)$ ký hiệu là đạo hàm cấp k của đa thức $P(x)$.

Bài 6.4 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Tìm đa thức $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ có bậc nhỏ nhất thỏa mãn $p(A) = 0$.
2. Tìm phần dư khi lấy đa thức $q(x) = x^{2024}$ chia cho đa thức $p(x)$. Sau đó, tính A^{2024}.
3. Tìm cơ sở và chiều của không gian vectơ con

$$V = \{f(A) \mid f \text{ là một đa thức hệ số thực}\}$$

Bài 6.5 (ĐH Trà Vinh)**.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2(x) \to P_2(x)$ xác định bởi

$$f(1+x^2) = 4 + x + 5x^2$$
$$f(1+2x+3x^2) = 10 + 13x + 23x^2$$
$$f(-x+x^2) = -1 - 2x - 3x^2$$

(a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2(x)$.

(b) Xác định m để véctơ $v = 1 + mx - 5x^2$ không thuộc $\operatorname{Im} f$.

7 TỔ HỢP

Bài 7.1 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Người ta cắm 30 lá cờ đỏ và 11 lá cờ xanh thành một hàng dọc. Rõ hơn, các cờ xanh được cắm ở các vị trí $1, 5, 9, \ldots, 41$ của hàng và các vị trí còn lại là cờ đỏ. Một người muốn lựa chọn 1 cờ xanh và 1 cờ đỏ đổi chỗ cho nhau sao cho sau khi đổi chỗ vẫn không có 2 cờ xanh nào được cắm cạnh nhau. Hỏi có bao nhiêu cách mà người đó có thể lựa chọn.

Bài 7.2 (ĐH Tân Trào)**.** Cho một hình chữ nhật (S) có kích thước $2 \times n$, $0 < n \in \mathbb{N}$. Ký hiệu R_n là số cách chia (S) thành các hình chữ nhật có kích thước 2×1, 1×2 và 2×2 và có các cạnh song song với các cạnh của hình chữ nhật (S). Hãy tính các giá trị R_3, R_4 và R_{2024}.

Bài 7.3 (ĐH Vinh)**.**

(a) Có 4 cặp đôi yêu nhau tham gia chơi một trò chơi như sau: Tên của mỗi cô gái được ghi vào một tấm thẻ và bỏ vào một phong bì. 4 chàng trai mỗi người chọn một phong bì trong số 4 phong bì nói trên. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra để không có chàng trai nào chọn đúng phong bì có ghi tên người yêu của mình?

(b) Hỏi tương tự câu (a) cho trường hợp 10 cặp đôi yêu nhau tham gia trò chơi.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: GIẢI TÍCH

1 DÃY SỐ

Bài 1.1 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM). Cho hai số thực dương $a < b$. Đặt $x_0 = a, x_1 = b$ và

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}x_{n-1}\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right).$$

Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ.

Bài 1.2 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh). Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots \frac{n}{(n+1)!},\ n \geq 1.$$

(a) Tìm giá trị $n \in \mathbb{N}$ lớn nhất để

$$u_n < \frac{2023}{2024}.$$

(b) Tính giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_1^n + u_2^n + \cdots + u_{2024}^n}.$$

Bài 1.3 (ĐH Giao thông Vận Tải). Cho dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn

$$\frac{1}{2} < a_n < 1\, \forall n \geq 1.$$

Dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi

$$x_1 = a_1,\, x_{n+1} = \frac{2(a_{n+1} + x_n) - 1}{1 + 2a_{n+1}x_n}\ \forall n \geq 1.$$

(a) Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên.

(b) Tìm $\lim x_n$.

Bài 1.4 (ĐH Vinh, N.V. Đức). Với x là một số thực, ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 2024 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{3[x_n]+4}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

(a) Chứng minh $x_8 < 1$.

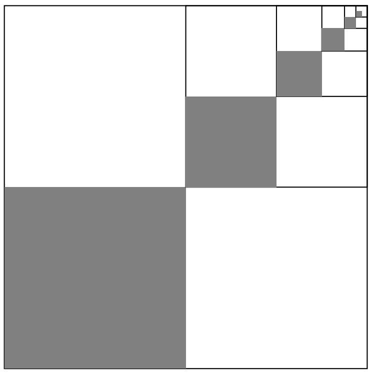
(b) Chứng minh $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy hội tụ, tìm giới hạn của dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2 CHUỖI SỐ

Bài 2.1 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM). Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta \sin^2(k\alpha)}{1+\beta \sin^2(k\alpha)}, \ \alpha \notin \{l\pi : l \in \mathbb{Z}\}, \ \beta > 0.$$

Bài 2.2 (ĐH Khoa học Tự nhiên - ĐHQG HN). Hình vẽ dưới đây liên quan đến một chuỗi số dương.



Hãy xác định chuỗi này và cho biết tổng của nó nếu chuỗi hội tụ.

3 HÀM SỐ

Bài 3.1 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM). Cho f là hàm số thực trên $(0,\infty)$. Giả sử với mọi $x \in (0,\infty)$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x^\alpha) = f(x)\sin^2\alpha + f(1)\cos^2\alpha.$$

Chứng minh f khả vi tại 1.

Bài 3.2 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh).

(a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình

$$2x = \sqrt{x+n} + \sqrt{x+n+1}$$

có nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n.

(b) Tính

$$a := \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} \quad \text{và} \quad b := \lim_{n\to+\infty} (x_n - a\sqrt{n}).$$

Bài 3.3 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh). Cho hàm số f xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right| & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng f khả vi tại 0 nhưng f không khả vi tại các điểm

$$x_n = \frac{2}{2n+1} \quad \text{với} \;\; n \in \mathbb{Z}.$$

Bài 3.4 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh). Giả sử f khả vi liên tục trên $(0,\infty)$ và cho $f(0) = 1$. Chứng minh rằng nếu

$$|f(x)| \leq e^{-x}$$

với $x \geq 0$ thì tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $f'(x_0) = -e^{-x_0}$.

Bài 3.5 (ĐH Giao thông Vận Tải). Cho a, b là các số thực và $b > 0$. Hàm f xác định trên $[-1,1]$, được cho bởi

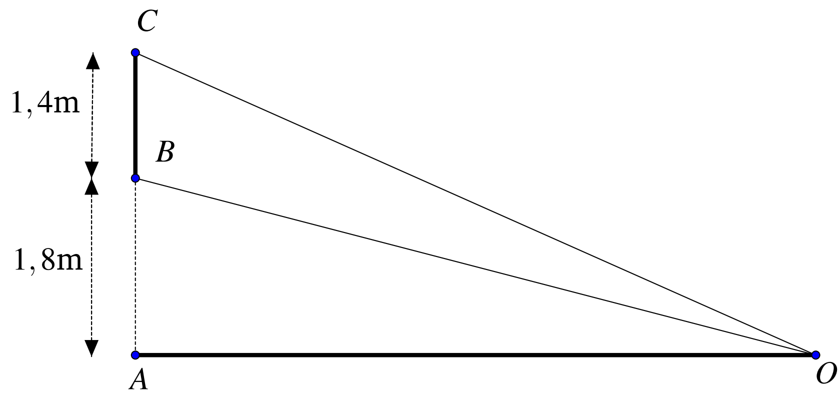
$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}) & \text{nếu } x \neq 0; \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

a) Tìm tất cả các giá trị của a để hàm f liên tục trên $[-1,1]$.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để tồn tại $f'(0)$.

c) Tìm điều kiện của a, b để tồn tại $f''(0)$.

Bài 3.6 (ĐH Giao thông Vận Tải). Một màn ảnh hình chữ nhật cao $1,4m$ và đặt ở độ cao $1,8m$ so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình như hình vẽ). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng tại O sao cho góc nhìn lớn nhất. Tính khoảng cách từ vị trí đó đến màn ảnh? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ nhọn.



Bài 3.7 (ĐH Khoa học Tự nhiên - ĐHQG HN). Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{nếu } x \leq 0, \\ be^x + x & \text{nếu } x > 0, \end{cases}$$

trong đó a và b là các tham số thực. Xác định a và b sao cho hàm f có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$.

Bài 3.8 (ĐH Vinh, N.V. Đức). Cho hàm số sau $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f_{2024}(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

trong đó

$$\begin{cases} f_{n+1}(x) = f(f_n(x)), \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ f_1(x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$f_2(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.9 (ĐH Vinh, N.V. Đức). Cho hàm số

$$f(x) = \left(\frac{2023^x + 2024^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, \ x > 0.$$

(a) Tìm

$$\lim_{x \to 0^+} f(x).$$

(b) Chứng minh f là hàm số đơn điệu tăng trên $(0, +\infty)$.

4 PHÉP TÍNH VI PHÂN

Bài 4.1 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực)**.**

(a) Cho $f : (-\infty, +\infty) \to [0, +\infty)$ là hàm số có đạo hàm liên tục tới cấp ba và thỏa mãn

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \left|f'''(x)\right| \leq 1.$$

Chứng minh rằng

$$f''(x) \geq -\sqrt[3]{\frac{3}{2}f(x)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện của ý (a) sao cho

$$f''(x) = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}f(x)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 4.2 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM)**.** Cho hàm số $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[0,1]$, khả vi trên $(0,1)$ sao cho có một $M > 0$ và $c \in [0,1]$ thỏa $f(c) = 0$ và

$$|f'(x)| \leq M|f(x)|,\ \forall x \in (0,1).$$

Chứng minh $f(x) = 0$ với mọi $x \in [0,1]$.

Bài 4.3 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.** Cho f khả vi trên $\mathbb{R}$ và f' giảm ngặt trên $\mathbb{R}$.

(a) Chứng minh rằng với mỗi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1).$$

(b) Chứng minh rằng nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ thì

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

(c) Tìm hàm số g khả vi trên $\mathbb{R}$ và tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$ nhưng

$$\lim_{x\to+\infty} g'(x) \neq 0.$$

Bài 4.4 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên). Giả sử V là tập hợp các hàm liên tục $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ và khả vi trên $(0,1)$, thỏa mãn

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

Xác định các giá trị $\alpha \in \mathbb{R}$ để với mỗi $f \in V$, luôn tồn tại $\xi \in (0,1)$ sao cho

$$f(\xi) + \alpha = f'(\alpha).$$

Bài 4.5 (ĐH Khoa học Tự nhiên - ĐHQG HN). Cho $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên $[0,3]$ và khả vi trong $(0,3)$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,3)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(2) + f(1) - f(0)}{2}.$$

Bài 4.6 (ĐH Mỏ - Địa chất, H.N. Huấn). Giả sử có chuỗi có hai đầu hướng ra vô cực

$$\ldots + f''(x) + f'(x) + f(x) + \int_0^x f(t)dt + \int_0^x \big(\int_0^t f(s)ds\big)dt + \ldots$$

và hội tụ đều trên khoảng $(-1,1)$. Hỏi rằng chuỗi là biểu diễn của số nào?

Bài 4.7 (ĐH Vinh, N.V. Đức). Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có đạo hàm đến cấp hai và f'' là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hơn nữa hàm số f thỏa mãn

$$|f(x)| \leqslant 2024, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $f''(x) = 0$.

5 PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 5.1 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM). Cho số thực dương α và hàm số f liên tục và nghịch biến trên $[0,1]$, $a \in (0,1)$ thỏa

$$\int_0^a f(t)dt < \frac{a}{2025}$$

và $f(0) = \beta > 0$. Chứng minh phương trình

$$f(x) = x^{2024}$$

có nghiệm trong $[0,1]$.

Bài 5.2 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh). Giả sử f là hàm số khả vi liên tục trên đoạn $[0,1]$, thỏa mãn điều kiện $f(0)=0$ và $0 \leq f'(x) \leq 1$ với mọi $x \in [0,1]$. Xét hàm số F xác định bởi

$$F(t) = \left(\int_0^t f(x)dx\right)^2 - \int_0^t (f(x))^3 dx \quad \text{với } t \in [0,1].$$

(a) Chứng minh rằng F là hàm số đồng biến trên $[0,1]$.

(b) Chứng minh rằng

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \geq \int_0^1 (f(x))^3 dx.$$

Cho một ví dụ về hàm f mà đẳng thức xảy ra.

Bài 5.3 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên). Cho $f\colon [0,1] \to (0,+\infty)$ là một hàm khả tích thỏa mãn

$$f(x)f(1-x) = 1 \quad \forall x \in [0,1].$$

Chứng minh rằng

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geq 1.$$

Bài 5.4 (ĐH Khoa học Tự nhiên - ĐHQG HN). Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là hàm khả tích trên $[0,1]$ và liên tục trên $(0,1)$. Chứng minh rằng tồn tại $a, b \in (0,1)$ phân biệt sao cho

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Bài 5.5 (ĐH Mỏ - Địa chất, H.N. Huấn). Tính tích phân

$$\iiiint\limits_{x^2+y^2+z^2+v^2 \leq 1} e^{x^2+y^2-z^2-v^2} dxdydzdv.$$

Bài 5.6 (ĐH Vinh, N.V. Đức). Chứng minh rằng

$$\frac{9}{8\pi} < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx < \frac{3}{2\pi}.$$

6 PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 6.1 (ĐH Khoa học Tự nhiên - ĐHQG HN). Cho $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi. Tìm f nếu

$$\left(f'(x)\right)^2 - 3f'(x) + 2 = 0 \quad \text{với mọi } x \in (0,1).$$

Phần III

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 Đại số

1.1 Bảng A

BÀI 1.
(a): Với $a = -1$ thì ma trận A bằng

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hạng của ma trận lúc này bằng 3.

(b): Dùng biến đổi sơ cấp hàng và khai triển Laplace ta có

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix} 1 & a+1 & a+2 & 0 \\ a+3 & 1 & 0 & a+2 \\ 0 & a & a+3 & -1 \\ 0 & a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & a+2 \\ a & a+3 & -1 \\ a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix} - (a+3)\det\begin{pmatrix} a+1 & a+2 & 0 \\ a & a+3 & -1 \\ a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix}, \\
&= 2(a+3) + (a+2)\left[a(a+3) - (a+2)(a+3)\right] - \\
&- (a+3)\left[2(a+3)(a+1) - (a+2)(2a+2)\right], \\
&= 2(a+3) - 2(a+2)(a+3) - (a+3)(2a+2), \\
&= -4(a+1)(a+3).
\end{aligned}$$

Do đó định thức $\det(A) > 0$ khi và chỉ khi $-3 < a < -1$.

(c): Nếu $a \neq -3, -1$, thì $\det(A) \neq 0$. Do đó trong trường hợp này phương trình chỉ có nghiệm tầm thường, số chiều của không gian nghiệm tương ứng bằng 0.
Với $a \in \{-1, -3\}$, tính cụ thể được $\operatorname{rank}(A) = 3$. Số chiều của không gian nghiệm tương ứng bằng $4 - \operatorname{rank}(A) = 1$.

BÀI 2.

(a): Gọi a_i là số muỗi ban đầu tương ứng của phòng $i \in \{1,2,3,4\}$. Từ giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 0.4a_1 + 0.2a_4 = 24, \\ 0.4a_2 + 0.3a_3 + 0.2a_4 = 50, \\ 0.3a_2 + 0.4a_3 + 0.2a_4 = 52, \\ 0.6a_1 + 0.3a_2 + 0.3a_3 + 0.4a_4 = 74. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta nhận được nghiệm (a_1, a_2, a_3, a_4) với:

$$a_1 = 20, a_2 = 40, a_3 = 60, a_4 = 80.$$

Vậy thời điểm ban đầu số muỗi của các phòng lần lượt là $20; 40; 60; 80$.

(b): Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là số muỗi tương ứng của các phòng $1, 2, 3, 4$ ở trạng thái ổn định. Khi đó $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 200$, và sau một phút số muỗi mỗi phòng tương ứng sẽ là x_1', x_2', x_3', x_4' trong đó

$$\begin{cases} x_1' = 0.4x_1 + 0.2x_4, \\ x_2' = 0.4x_2 + 0.3x_3 + 0.2x_4, \\ x_3' = 0.3x_2 + 0.4x_3 + 0.2x_4, \\ x_4' = 0.6x_1 + 0.3x_2 + 0.3x_3 + 0.4x_4. \end{cases}$$

Từ điều kiện trạng thái ổn định $\left(x_1', x_2', x_3', x_4'\right) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ta có

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a, a\right),$$

với a là một số nào đó. Kết hợp với điều kiện $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 200$, suy ra số muỗi tương ứng của các phòng $1, 2, 3, 4$ ở trạng thái ổn định là $25; 50; 50; 75$.

BÀI 3.

(a): Thay $x = 1$ vào giả thiết ta có $0 \cdot P(1) = 3 \cdot P(1)$. Do đó $P(1) = 0$. Lại thay $x = 0$ ta có $2 \cdot P(0) = (-1) \cdot P(1)$. Kết hợp với $P(1) = 0$, suy ra $P(0) = 0$. Lại thay $x = -1$ và kết hợp với $P(0) = 0$, suy ra $P(-1) = 0$. Do đó đa thức $P(x)$ có ít nhất ba nghiệm thực là $1, 0, -1$.

(b): Từ phần (a) suy ra $P(x) = x(x-1)(x+1)G(x)$, với $G(x)$ là một đa thức nào đó với hệ số thực. Thay vào đẳng thức ban đầu ta được:

$$x(x-1)(x+1)(x+2)G(x+1) = (x+2)x(x-1)(x+1)G(x).$$

Từ đó suy ra $G(x) = G(x+1)$ với mọi $x \notin \{0, \pm 1, -2\}$. Do đó $G(x) = c$ là một đa thức hằng số. Từ đó suy ra

$$P(x) = cx(x-1)(x+1),$$

với c là một số thực bất kỳ. Thử lại suy ra tất cả các đa thức thỏa mãn đề bài là $P(x) = cx(x-1)(x+1)$ với $c \in \mathbb{R}$.

BÀI 4.
(a): Dùng khai triển Laplace ta có

$$\begin{aligned}\det(A) &= -(x^3+y^3+z^3)+3xyz,\\ &= -(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).\end{aligned}$$

Như vậy $\det(A) = 0$ khi và chỉ khi $x+y+z=0$ hoặc $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$. Điều kiện sau tương đương $x=y=z$. Do đó không gian con cần tìm V với số chiều 2 là tập nghiệm của phương trình $x+y+z=0$. Một cơ sở của nó là $((-1,1,0);(-1,0,1))$.

(b): Giả sử $x,y,z \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $A(x,y,z) = 24$. Thế thì

$$-(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = 24.$$

Do đó một trong hai số $x+y+z$ và $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ phải chia hết cho 3. Mặt khác

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = (x+y+z)^2-3(xy+yz+zx).$$

Thế thì $x+y+z$ và $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ cùng chia hết cho 3. Lúc này tích của hai số sẽ chia hết cho 9. Tuy nhiên 24 không chia hết cho 9, nên điều này vô lý. Từ đó suy ra không tồn tại các số nguyên x,y,z thỏa mãn đề bài.

BÀI 5.
(a): Từ giả thiết $AB-BA = B^2A$, ta có

$$A^{-1}\left(B^2+B\right)A = A^{-1}B^2A + A^{-1}BA = A^{-1}(AB-BA)+A^{-1}BA = A^{-1}AB = B.$$

Do đó $B = A^{-1}\left(B^2+B\right)A$.

(b): Ví dụ về một cặp ma trận tốt là

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c): Ta chỉ ra tồn tại cặp hai ma trận (A,B) là tốt khi và chỉ khi n là một số chẵn. Đầu tiên giả sử tồn tại hai ma trận A,B có cùng cấp n thỏa mãn đề bài với n là một số lẻ. Theo phần (a), B và B^2+B đồng dạng, suy ra chúng có cùng tập các giá trị riêng. Vì cấp của B lẻ, nên đa thức đặc trưng của B là đa thức bậc lẻ với hệ số thực, suy ra B có ít nhất một giá trị riêng thực λ_1. Do đó B^2+B có giá trị riêng thực $\lambda_2 = \lambda_1^2+\lambda_1$. Thật vậy

$$\left|\left(B^2+B\right)-\left(\lambda_1^2+\lambda_1\right)I_n\right| = \left|(B-\lambda I_n)\right| \cdot \left|(B+\lambda I_n)+I_n\right| = 0.$$

Theo điều trên B và B^2+B có cùng tập giá trị riêng, nên B cũng nhận $\lambda_2 = \lambda_1^2+\lambda_1$ là một giá trị riêng thực. Lặp lại lập luận trên, B cũng nhận $\lambda_3 = \lambda_2^2+\lambda_2$, $\lambda_4 = \lambda_3^2+\lambda_3$, ... làm các giá trị riêng. Vì tập giá trị riêng của một ma trận chỉ là hữu hạn, nên dãy $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ tuần hoàn, nghĩa là tồn tại $k \neq l \in \mathbb{Z}^+$ sao cho

$$\begin{cases} \lambda_{k+1} = \lambda_k^2 + \lambda_k, \\ \lambda_{k+2} = \lambda_{k+1}^2 + \lambda_{k+1}, \\ \cdots, \\ \lambda_l = \lambda_{l-1}^2 + \lambda_{l-1}, \\ \lambda_k = \lambda_l^2 + \lambda_l. \end{cases}$$

Thế thì $\lambda_k^2 + \cdots + \lambda_l^2 = 0$, với $\lambda_k, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{R}$. Do đó

$$\lambda_k = \ldots = \lambda_l = 0.$$

Từ đó suy ra B nhận $\lambda = 0$ là một giá trị riêng, suy ra B không khả nghịch, suy ra vô lý. Vậy cặp ma trận cùng cấp lẻ không thể là tốt.

Bây giờ ta chứng minh với mọi n chẵn, luôn tồn tại A, B cấp n thỏa mãn đề bài. Như phần (b), với $n = 2$ ta đã chọn được cặp ma trận tốt

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Với $n = 2k$ là một số chẵn bất kỳ, ta chọn ma trận khối:

$$A = A_2 \oplus \cdots \oplus A_2,$$

$$B = B_2 \oplus \cdots \oplus B_2,$$

với số khối bằng k. Khi đó cặp (A, B) là tốt với cấp của A, B bằng n. Vậy tập các số n thỏa mãn đề bài là n chẵn.

1.2 Bảng B

BÀI 1.
(a): Với $a = -1$ thì ma trận A bằng

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hạng của ma trận lúc này bằng 3.

(b): Dùng biến đổi sơ cấp hàng và khai triển Laplace ta có

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix} 1 & a+1 & a+2 & 0 \\ a+3 & 1 & 0 & a+2 \\ 0 & a & a+3 & -1 \\ 0 & a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & a+2 \\ a & a+3 & -1 \\ a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix} - (a+3)\det\begin{pmatrix} a+1 & a+2 & 0 \\ a & a+3 & -1 \\ a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix}, \\
&= 2(a+3) + (a+2)\left[a(a+3) - (a+2)(a+3)\right] - \\
&- (a+3)\left[2(a+3)(a+1) - (a+2)(2a+2)\right], \\
&= 2(a+3) - 2(a+2)(a+3) - (a+3)(2a+2), \\
&= -4(a+1)(a+3).
\end{aligned}$$

Do đó định thức $\det(A) > 0$ khi và chỉ khi $-3 < a < -1$.

(c): Nếu $a \neq -3, -1$, thì $\det(A) \neq 0$. Do đó trong trường hợp này phương trình chỉ có nghiệm tầm thường, số chiều của không gian nghiệm tương ứng bằng 0.
Với $a \in \{-1, -3\}$, tính cụ thể được $\operatorname{rank}(A) = 3$. Số chiều của không gian nghiệm tương ứng bằng $4 - \operatorname{rank}(A) = 1$.

BÀI 2.
(a): Hai ma trận A, B cùng có đa thức đặc trưng là $X^2 - 2$, do đó cùng có giá trị riêng $\pm\sqrt{2}$.
Với $\lambda_1 = \sqrt{2}$, một vectơ riêng tương ứng của A là $\left(\sqrt{2}, 1\right)^T$.
Với $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, một vectơ riêng tương ứng của A là $\left(-\sqrt{2}, 1\right)^T$.
Do đó với

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ta có

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(b): Điều kiện $R^{-1}AR = B$ tương đương $AR = RB$. Đặt

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

suy ra điều kiện $AR = RB$ trở thành

$$\begin{cases} a = -d, \\ b = -2c. \end{cases}$$

Do đó tất cả các ma trận R thỏa mãn đề bài là: $R = \begin{pmatrix} a & -2c \\ c & -a \end{pmatrix}$, với $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $-a^2+2c^2=1$. Ví dụ về một ma trận như vậy cho bởi $R = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

BÀI 3.

(a): Gọi a_i là số muỗi ban đầu tương ứng của phòng $i \in \{1,2,3,4\}$. Từ giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 0.4a_1 + 0.2a_4 = 24, \\ 0.4a_2 + 0.3a_3 + 0.2a_4 = 50, \\ 0.3a_2 + 0.4a_3 + 0.2a_4 = 52, \\ 0.6a_1 + 0.3a_2 + 0.3a_3 + 0.4a_4 = 74. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta nhận được nghiệm (a_1,a_2,a_3,a_4) với:

$$a_1 = 20, a_2 = 40, a_3 = 60, a_4 = 80.$$

Vậy thời điểm ban đầu số muỗi của các phòng lần lượt là $20;40;60;80$.

(b): Gọi x_1,x_2,x_3,x_4 là số muỗi tương ứng của các phòng $1,2,3,4$ ở trạng thái ổn định. Khi đó $x_1+x_2+x_3+x_4 = 200$, và sau một phút số muỗi mỗi phòng tương ứng sẽ là x_1', x_2', x_3', x_4' trong đó

$$\begin{cases} x_1' = 0.4x_1 + 0.2x_4, \\ x_2' = 0.4x_2 + 0.3x_3 + 0.2x_4, \\ x_3' = 0.3x_2 + 0.4x_3 + 0.2x_4, \\ x_4' = 0.6x_1 + 0.3x_2 + 0.3x_3 + 0.4x_4. \end{cases}$$

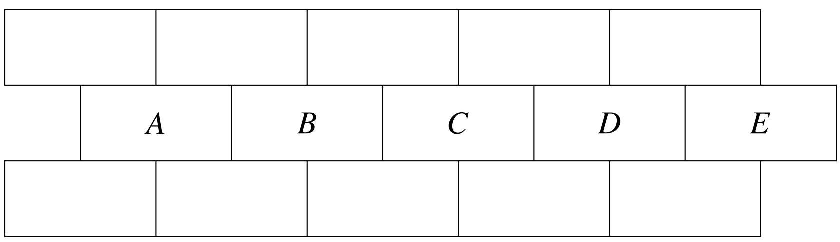
Từ điều kiện trạng thái ổn định $\left(x_1', x_2', x_3', x_4'\right) = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ ta có

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(\frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a, a\right),$$

với a là một số nào đó. Kết hợp với điều kiện $x_1+x_2+x_3+x_4 = 200$, suy ra số muỗi tương ứng của các phòng $1,2,3,4$ ở trạng thái ổn định là $25;50;50;75$.

BÀI 4.

(a): Ký hiệu các viên gạch ở hàng thứ 2 lần lượt là A,B,C,D,E.



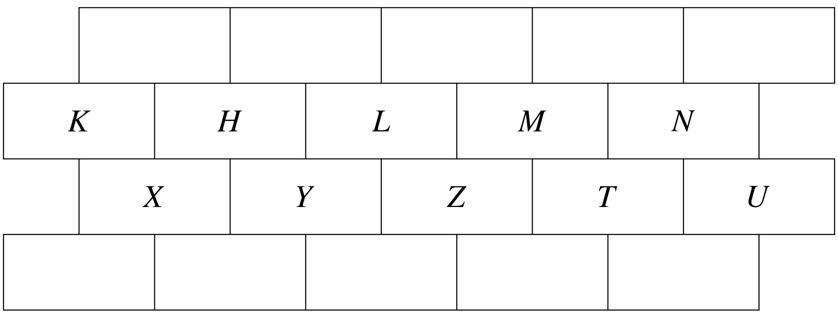
Nhận thấy một trong các viên gạch A,B,C,D,E phải được chọn.
Với viên gạch A, có 3 cách chọn một viên gạch ở hàng 1 không kề với A. Tương tự, có 3 cách chọn một viên gạch ở hàng 3 không kề với A. Suy ra có $3\times 3=9$ cách chọn ra ba viên gạch không kề nhau, một từ mỗi hàng, trong đó viên ở hàng 2 là A.
Với viên gạch B, có 3 cách chọn một viên gạch ở hàng 1 không kề với B. Tương tự, có 3 cách chọn một viên gạch ở hàng 3 không kề với B. Suy ra có $3\times 3=9$ cách chọn ra ba viên gạch không kề nhau, một từ mỗi hàng, trong đó viên ở hàng 2 là B.
Với các tính toán tương tự,

- Có $3\times 3=9$ cách chọn ba viên gạch không kề nhau, một từ mỗi hàng, trong đó viên ở hàng 2 là C.
- Có $3\times 3=9$ cách chọn ba viên gạch không kề nhau, một từ mỗi hàng, trong đó viên ở hàng 2 là D.
- Có $4\times 4=16$ cách chọn ba viên gạch không kề nhau, một từ mỗi hàng, trong đó viên ở hàng 2 là E.

Vì thế tổng số các cách chọn là

$$9+9+9+9+16=52.$$

(b): Ký hiệu các viên gạch ở hàng 2 là K,H,L,M,N và ở hàng 3 là X,Y,Z,T,U.



Để lấy ra các viên gạch ở hàng 2 và hàng 3, ta có các cách sau: KY,KZ,KT,KU, HZ,HT,HU, LX,LT,LU, MX,MY,MU, NX,NY,NZ.
Gọi k (tương ứng h,l,m,n) là số cách chọn ra một viên gạch ở hàng 1 không kề với K (tương ứng H,L,M,L).
Tương tự, gọi x (tương ứng y,z,t,u) là số cách chọn ra một viên gạch ở hàng 4 không kề với X (tương ứng Y,Z,T,U).
Khi đó số cách chọn ra 4 viên gạch từ mỗi hàng, trong đó các viên ở hàng $2,3$ tương ứng là P,Q, với $P\in\{K,H,L,M,N\}$, $Q\in\{X,Y,Z,T,U\}$ bằng pq. (Ví dụ, $P=K$, $Q=Y$, thì số cách chọn là ky.)

Dễ thấy,

$$k = u = 4, h = l = m = n = x = y = z = t = 3.$$

Vì thế số các cách chọn ra 4 viên gạch thỏa mãn bài toán bằng

$$\begin{aligned}
&ky + kz + kt + ku + hz + ht + hu + lx + lt + lu + mx + my + mu + nx + ny + nz \\
=&4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + \\
&+ 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \\
=&9 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 81 + 72 + 16 = 169.
\end{aligned}$$

BÀI 5.

(a): Dùng khai triển Laplace ta có

$$\begin{aligned}
\det(A) &= -(x^3 + y^3 + z^3) + 3xyz, \\
&= -(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).
\end{aligned}$$

Như vậy $\det(A) = 0$ khi và chỉ khi $x + y + z = 0$ hoặc $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$. Điều kiện sau tương đương $x = y = z$. Do đó không gian con cần tìm V với số chiều 2 là tập nghiệm của phương trình $x + y + z = 0$. Một cơ sở của nó là $((-1, 1, 0); (-1, 0, 1))$.

(b): Giả sử $x, y, z \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $A(x, y, z) = 24$. Thế thì

$$-(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 24.$$

Do đó một trong hai số $x + y + z$ và $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ phải chia hết cho 3. Mặt khác

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = (x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx).$$

Thế thì $x + y + z$ và $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ cùng chia hết cho 3. Lúc này tích của hai số sẽ chia hết cho 9. Tuy nhiên 24 không chia hết cho 9, nên điều này vô lý. Từ đó suy ra không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn đề bài.

2 Giải tích

2.1 Bảng A

Bài 1.

(a) Từ định nghĩa

$$a_{2k+1} = a_{2k-1} + \frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k-1)!} < a_{2k-1} \quad \text{với mọi } k \geq 1.$$

Vậy dãy con $(a_{2k+1})_k$ đơn điệu giảm. Tương tự,

$$a_{2k+2} = a_{2k} - \frac{1}{(2k+1)!} + \frac{1}{(2k)!} > a_{2k} \quad \text{với mọi } k \geq 1.$$

Vậy dãy con $(a_{2k})_k$ đơn điệu tăng. Vẫn từ định nghĩa ta có

$$a_{2k+1} = a_{2k} + \frac{1}{(2k)!} > a_{2k} \quad \text{với mọi } k \geq 1.$$

Kết hợp các điều trên ta đi đến

$$a_2 < a_4 < \cdots < a_{2k} < a_{2k+2} < \cdots < a_{2l+1} < a_{2l-1} < \cdots < a_3 < a_1.$$

Do $a_2 = 0$ và $a_3 = 1/2$ nên tất cả các số nguyên dương n sao cho $a_n \geq 1/2$ là 1 và 3.

(b) Ta đã biết dãy con $(a_{2k})_k$ đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi a_1. Vậy $(a_{2k})_k$ hội tụ. Ký hiệu a_∞ là giới hạn của dãy con $(a_{2k})_k$. Ta sử dụng định nghĩa để chứng minh $a_n \to a_\infty$. Thật vậy, lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, ta cần chỉ ra tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_n - a_\infty| < \varepsilon \quad \text{với mọi } n > N.$$

Trước hết ta chọn $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\frac{1}{(2k)!} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{với mọi } k \geq N_1.$$

Khi đó ta luôn có

$$|a_{2k+1} - a_{2k}| = \frac{1}{(2k)!} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{với mọi } k \geq N_1.$$

Tiếp theo vì $a_{2k} \to a_\infty$ khi $k \to \infty$ nên tồn tại $N_2 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_{2k} - a_\infty| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{với mọi } k \geq N_2.$$

Bây giờ ta chọn $N = \max\{2N_1, 2N_2\}$ và xét $n > N$ bất kỳ.

- Nếu n là một số chẵn, chẳng hạn $n = 2k$ với $k \in \mathbb{N}$, thì từ cách chọn N_2 ta có ngay
$$|a_n - a_\infty| = |a_{2k} - a_\infty| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$
- Nếu n là một số lẻ, chẳng hạn $n = 2k+1$ với $k \in \mathbb{N}$, thì từ cách chọn N_1 và N_2 ta có ngay
$$|a_n - a_\infty| = |a_{2k+1} - a_\infty| \le |a_{2k} - a_\infty| + |a_{2k+1} - a_{2k}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
do $k = n/2 - 1/2 \ge N/2 = \max\{N_1, N_2\}$.

Như vậy trong mọi trường hợp ta luôn có $|a_n - a_\infty| < \varepsilon$ với mọi $n > N$, và do đó dãy số (a_n) hội tụ (đến a_∞).

(c) Ta chứng minh giới hạn của dãy số (a_n) là một số vô tỉ. Theo ý (b) dãy số (a_n) hội tụ và giới hạn của nó là một số dương. Phản chứng, giả sử giới hạn của (a_n) là số hữu tỉ p/q trong đó p và q là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Ta nhắc lại từ ý (a)
$$a_{2k} \nearrow p/q \quad \text{và} \quad a_{2l+1} \searrow p/q$$
Do đó
$$0 \le \left|a_n - \frac{p}{q}\right| \le \left|a_{n+1} - a_n\right| = \frac{1}{(n+1)!} \quad \forall n \ge 1.$$
Do các dãy con $(a_{2k})_k$ và $(a_{2l+1})_l$ là đơn điệu ngặt nên ta phải có
$$0 < \left|a_n - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{(n+1)!} \quad \forall n \ge 1.$$
Lấy $n > q$ bất kỳ (và cố định), bằng cách nhân các vế của bất đẳng thức trên với $n!$ ta được
$$0 < \left|n!a_n - \frac{n!p}{q}\right| < \frac{1}{n+1}.$$
Đây là điều vô lý vì $n!a_n - n!p/q \in \mathbb{Z}$.

Nhận xét.

- Dãy (a_n) là dãy tổng riêng của chuỗi đan dấu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$
Chuỗi này hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

- Sau đây là một phép chứng minh khác cho $a_\infty \notin \mathbb{Q}$ không sử dụng tính đơn điệu của các dãy con $(a_{2k})_k$ và $(a_{2l+1})_l$. Phản chứng, giả sử

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots=\frac{m}{n}$$

với m và n nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Nhân hai vế với $n!$ ta đi đến

$$n!\Big(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\Big)+\underbrace{\frac{(-1)^{n+1}n!}{(n+1)!}+\cdots}_{S}=(n-1)!m.$$

Vậy S là một số nguyên không âm. Do

$$\begin{aligned}|S| &< \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\\ &< \frac{1}{n+1}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n}<1\end{aligned}$$

nên ta phải có $S=0$. Tuy nhiên, $|S|>0$, và do đó giả thiết phản chứng là sai, vì

$$\begin{aligned}|S| &\geq \left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\cdots\right|\\ &> \left|\frac{2}{n+1}-\frac{1}{n}\right|\geq 0.\end{aligned}$$

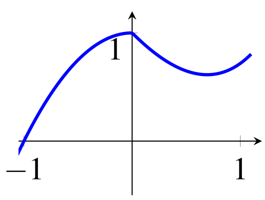
BÀI 2.

(a) Khi $x\neq 0$ thì f là hàm liên tục với mọi cách chọn a, b, và c. Vì vậy, ta chỉ cần khảo sát tính liên tục của f tại $x=0$. Rõ ràng

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=b=f(0)$$

và

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=1.$$



Vậy khi $b=1$, a và c tùy ý thì f liên tục tại 0 và do đó liên tục trên $\mathbb{R}$. (Tham khảo hình vẽ bên với $b=1$, $c=-2$, và $a=-1$.)

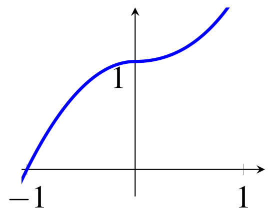
(b) Để f khả vi trên $\mathbb{R}$ thì f cần phải liên tục trên $\mathbb{R}$. Theo ý (a) ta phải có $b=1$. Khi $x\neq 0$ thì f luôn là hàm khả vi với mọi cách chọn a và c. Vì vậy, ta chỉ cần khảo sát tính khả vi của f tại $x=0$.

Theo định nghĩa

$$f'_{-}(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{ax^2+1-1}{x} = 0$$

và

$$f'_{+}(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^x+cx-1}{x} = 1+c$$



Vậy khi $c=-1$, $b=1$, và a tùy ý thì f khả vi tại 0 và do đó khả vi trên $\mathbb{R}$. (Tham khảo hình vẽ bên với $b=1$, $c=-1$, và $a=-1$.)

(c) Từ ý (b) ta biết rằng khi $c=-1$, $b=1$, và a tùy ý thì hàm f khả vi trên $\mathbb{R}$. Trong trường hợp này, đạo hàm của hàm f là

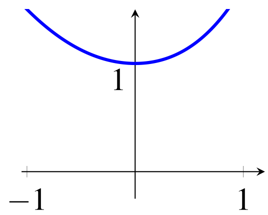
$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{nếu } x \le 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0, \\ e^x - 1 & \text{nếu } x > 0, \end{cases}$$

Vì vậy khi $x \neq 0$ thì f luôn là hàm khả vi cấp hai với mọi cách chọn của a. Tại $x=0$ ta có

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

và

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{2ax}{x} = 2a.$$



Vậy khi $c=-1$, $b=1$, và $a=1/2$ thì f khả vi cấp hai tại 0 và do đó khả vi cấp hai trên $\mathbb{R}$. (Tham khảo hình vẽ bên với $b=1$, $c=-1$, và $a=1/2$.)

BÀI 3.

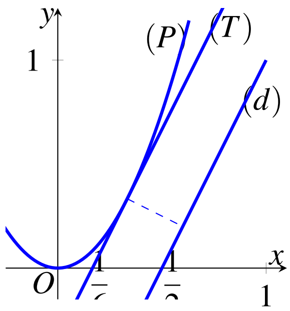
(a) Đường thẳng (d) và parabol (P) không cắt nhau vì phương trình hoành độ giao điểm

$$3x^2 = 2x - 1$$

không có nghiệm thực. (Có thể thấy $3x^2-(2x-1) = 2x^2+(x-1)^2 > 0$.)

(b) Gọi (T) là tiếp tuyến của (P) tại $(1/3;1/3)$. Khi đó (T) có phương trình $2x - \dfrac{1}{3}$.

Do (T) có hệ số góc 2 nên (T) song song với (d).



Ta sẽ chứng minh khoảng cách ngắn nhất giữa (d) và (P) chính là khoảng cách giữa (d) và (T) và do đó bằng

$$\frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

Khoảng cách này đạt được tại hai điểm

$$\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) \in (P) \quad \text{và} \quad \left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right) \in (d).$$

Do (T) và (d) là các đường thẳng song song nên để chứng minh khoảng cách ngắn nhất giữa (d) và (P) chính là khoảng cách giữa (d) và (T) ta chỉ cần chứng minh (P) và (d) nằm về hai phía khác nhau của (T).

Thật vậy, do phương trình

$$3x^2 = 2x - \frac{1}{3}$$

chi có nghiệm duy nhất $x = 1/3$ nên (P) và (T) chỉ cắt nhau tại điểm $(1/3;1/3)$. Điều này chứng tỏ (P) nằm về một phía so với (T).

Cuối cùng vì điểm $(1/6;0) \in (T)$ nằm giữa các điểm $(0;0) \in (P)$ và $(1/2;0) \in (d)$ nên (P) và (d) nằm về hai phía khác nhau của (T).

BÀI 4.

(a) Lấy $f \in \mathscr{F}$ bất kỳ sao cho $f \geq 0$. Trước tiên ta chứng minh $f' \geq -\sqrt{2f}$. Thật vậy, xét $x \in \mathbb{R}$ bất kỳ nhưng cố định. Với $h > 0$ tùy ý, theo công thức khai triển Taylor với phần dư Lagrange ta có

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(\xi_h)}{2!}h^2$$

trong đó $\xi_h \in [x, x+h]$. Sử dụng giả thiết $f \geq 0$ và $|f''| \leq 1$ nên ta có

$$0 \leq f(x+h) \leq f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \left|\frac{f'(\xi_h)}{2!}h^2\right| \leq f(x) + f'(x)h + \frac{h^2}{2}.$$

Vậy

$$f'(x) \geq -\frac{f(x)}{h} - \frac{h}{2} \quad \text{với mọi } h > 0.$$

Xét hai trường hợp:

(i) Nếu $f(x)=0$ thì từ $f'(x)\geq -h/2$ và do $h>0$ tùy ý nên $f'(x)\geq 0=\sqrt{2f(x)}$.

(ii) Nếu $f(x)>0$ thì bằng cách chọn $h=\sqrt{2f(x)}$ ta được

$$f'(x)\geq -\frac{f(x)}{\sqrt{2f(x)}}-\frac{\sqrt{2f(x)}}{2}=-\sqrt{2f(x)}.$$

Như vậy trong cả hai trường hợp ta đều thu được $f'(x)\geq -\sqrt{2f(x)}$.

Bằng lý luận tương tự ta chứng minh được $f'\leq\sqrt{2f}$. Thật vậy, trong trường hợp này với $h<0$ ta có công thức khai triển

$$f(x-h)=f(x)-\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(\xi)}{2!}h^2$$

trong đó $\xi\in[x-h,x]$. Sử dụng giả thiết $f\geq 0$ và $|f''|\leq 1$ ta có

$$0\leq f(x-h)\leq f(x)-\frac{f'(x)}{1!}h+\left|\frac{f'(\xi)}{2!}h^2\right|\leq f(x)-f'(x)h+\frac{h^2}{2}.$$

Vậy

$$f'(x)\leq\frac{f(x)}{h}+\frac{h}{2}\quad\text{với mọi } h>0.$$

Bằng cách xét trường hợp và lập luận tương tự ta thu được $f'(x)\leq\sqrt{2f(x)}$. Kết hợp lại ta được

$$-\sqrt{2f(x)}\leq f'(x)\leq\sqrt{2f(x)}$$

và do đó f có tính chất SAT.

(b) Xét hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ được cho bởi

$$f(x)=\sin x.$$

Rõ ràng f là hàm khả vi cấp hai và có

$$|f''(x)|=|\sin x|\leq 1.$$

Vậy $f\in\mathscr{F}$. Tuy nhiên,

$$|f'(0)|=|\cos(0)|=1>0=2024|\sin 0|.$$

Vậy hàm f xác định như trên không có tính chất SAT.

Nhận xét. Với $0 \leq f \in \mathscr{F}$ bất kỳ, ta chỉ cần kiểm tra bất đẳng thức ở ý (a) tại $x = 0$ là đủ. Thật vậy, xét hàm $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$g(t) = f(x+t).$$

Dễ thấy $g \geq 0$, g khả vi cấp hai, và có

$$g'(t) = f'(x+t) \quad \text{và} \quad g''(t) = f''(x+t).$$

Vậy hàm $g \in \mathscr{F}$ và bất đẳng thức cần chứng minh (cho hàm f) trở thành

$$\left(g'(0)\right)^2 \leq 2024 g(0).$$

BÀI 5.

(a) Hàm số $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ được cho bởi

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{với } x \geq 0$$

thỏa mãn các yêu cầu. Thật vậy, trước tiên ta thấy

$$0 \leq \int_0^x f^2(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{x}{x+1} < 1$$

với mọi $x > 0$. Vì vậy trên $[0, +\infty)$, hàm $\displaystyle\int_0^x f^2(t)dt$ đơn điệu tăng và bị chặn trên nên $\exists$ giới hạn

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f^2(t)dt.$$

(b) Lấy $C > 1$ đủ lớn sao cho

$$|f'(x)| \leq C \quad \text{với mọi } x \geq 0.$$

Phản chứng, khi đó tồn tại $\varepsilon \in (0,1)$ và một dãy số dương $(x_k)_{k \geq 1}$ tiến ra $+\infty$ sao cho

$$x_{k+1} - x_k \geq \varepsilon \quad \text{và} \quad |f(x_k)| \geq 2\sqrt{\varepsilon} \quad \text{với mọi } k \geq 1.$$

Do f là hàm khả vi nên theo Định lý Lagrange với $x \in (x_k, x_k + \varepsilon/C)$ tồn tại $\xi_k \in (x_k, x)$ sao cho

$$f(x) = f(x_k) + f'(\xi_k)(x - x_k) = f(x_k) - f'(\xi_k)(x_k - x).$$

Khi đó

$$\begin{aligned}|f(x)| &\geq |f(x_k)| - \left|f'(\xi_k)(x_k - x)\right| \\ &\geq |f(x_k)| - C(x - x_k) \\ &\geq |f(x_k)| - \varepsilon \\ &\geq 2\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon > \varepsilon\end{aligned}$$

với mọi $x \in (x_k, x_k + \varepsilon/C)$. Chú ý rằng $x_k + \varepsilon/C < x_{k+1}$ theo cách chọn C và dãy (x_k). Vậy

$$\begin{aligned}\int_0^{x_{k+1}} f^2(t)dt &\geq \int_{x_1}^{x_{k+1}} f^2(t)dt \\ &= \sum_{i=1}^{k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^2(t)dt \\ &\geq \sum_{i=1}^{k} \int_{x_i}^{x_i+\varepsilon/C} f^2(t)dt \\ &\geq \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^2 = k\varepsilon^2.\end{aligned}$$

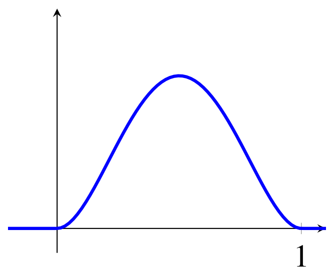
Vậy $\int_0^x f^2(t)dt$ không có giới hạn hữu hạn khi $x \to +\infty$.

(c) Câu trả lời là không. Thật vậy xét hàm f được cho bởi

$$f(x) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} h(2^n(x - 2^n))}$$

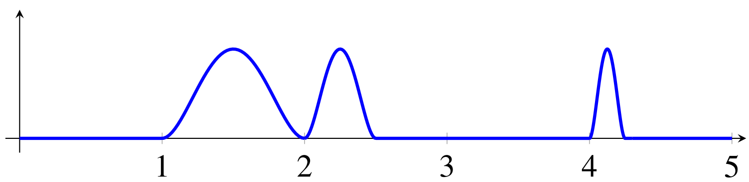
trong đó h là hàm được xác định bởi $h(x) = \phi(x)\phi(1-x)$ với

$$\phi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \geq 0, \\ 0 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$



(Tham khảo hình vẽ bên cạnh.) Rõ ràng hàm f là hàm

khả vi, không âm, và bị chặn trên $[0, +\infty)$. (Hình vẽ dưới đây mô tả hàm f trên đoạn $[0, 5]$.)



Không khó để thấy giá trị hàm f chỉ khác không trên các khoảng có dạng $(2^n, 2^n + 2^{-n})$ với $n \in \mathbb{N}$. Do

$$f\Big(2^n + \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\Big) = \frac{1}{4} \quad \text{với } n \in \mathbb{N}$$

nên khẳng định của ý (b) là không đúng. Vậy, để chứng tỏ hàm f xây dựng như trên là một phản ví dụ, ta cần chỉ ra giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f^2(t)dt$$

là tồn tại và hữu hạn. Để có được điều này, ta chỉ cần chứng tỏ dãy số dương

$$\Big(\int_0^{2^n+2^{-n}} f^2(t)dt\Big)_n$$

là bị chặn trên. Thật vậy, ta thấy

$$\begin{aligned}\int_0^{2^n+2^{-n}} f^2(t)dt &= \sum_{k=0}^n \int_{2^k}^{2^k+2^{-k}} f^2(t)dt\\ &= \sum_{k=0}^n \int_{2^k}^{2^k+2^{-k}} h(2^k(t-2^k))dt\\ &= \sum_{k=0}^n \Big(2^{-k}\int_0^1 h(t)dt\Big)\\ &< 2\int_0^1 h(t)dt.\end{aligned}$$

Nhận xét. Nếu có thêm giả thiết về tính bị chặn của f thì ta có thể sử dụng công thức khai triển Taylor đến cấp hai cho hàm $\int_0^x f^2(t)dt$ để đánh giá $f(x)$. Từ đó ta thu được kết luận ở ý (b). Chú ý rằng với mỗi $h > 0$ theo Cauchy thì tích phân $\int_x^{x+h} f^2(t)dt = o(1)$ khi $x \to +\infty$.

2.2 Bảng B

BÀI 1.

(a) Từ định nghĩa

$$a_{2k+1} = a_{2k-1} + \frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k-1)!} < a_{2k-1} \quad \text{với mọi } k \geq 1.$$

Vậy dãy con $(a_{2k+1})_k$ đơn điệu giảm. Tương tự,

$$a_{2k+2} = a_{2k} - \frac{1}{(2k+1)!} + \frac{1}{(2k)!} > a_{2k} \quad \text{với mọi } k \geq 1.$$

Vậy dãy con $(a_{2k})_k$ đơn điệu tăng. Vẫn từ định nghĩa ta có

$$a_{2k+1} = a_{2k} + \frac{1}{(2k)!} > a_{2k} \quad \text{với mọi } k \geq 1.$$

Kết hợp các điều trên ta đi đến

$$a_2 < a_4 < \cdots < a_{2k} < a_{2k+2} < \cdots < a_{2l+1} < a_{2l-1} < \cdots < a_3 < a_1.$$

Do $a_2 = 0$ và $a_3 = 1/2$ nên tất cả các số nguyên dương n sao cho $a_n \geq 1/2$ là 1 và 3.

(b) Ta đã biết dãy con $(a_{2k})_k$ đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi a_1. Vậy $(a_{2k})_k$ hội tụ. Ký hiệu a_∞ là giới hạn của dãy con $(a_{2k})_k$. Ta sử dụng định nghĩa để chứng minh $a_n \to a_\infty$. Thật vậy, lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, ta cần chỉ ra tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_n - a_\infty| < \varepsilon \quad \text{với mọi } n > N.$$

Trước hết ta chọn $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\frac{1}{(2k)!} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{với mọi } k \geq N_1.$$

Khi đó ta luôn có

$$|a_{2k+1} - a_{2k}| = \frac{1}{(2k)!} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{với mọi } k \geq N_1.$$

Tiếp theo vì $a_{2k} \to a_\infty$ khi $k \to \infty$ nên tồn tại $N_2 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_{2k} - a_\infty| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{với mọi } k \geq N_2.$$

Bây giờ ta chọn $N = \max\{2N_1, 2N_2\}$ và xét $n > N$ bất kỳ.

- Nếu n là một số chẵn, chẳng hạn $n = 2k$ với $k \in \mathbb{N}$, thì từ cách chọn N_2 ta có ngay
$$|a_n - a_\infty| = |a_{2k} - a_\infty| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$
- Nếu n là một số lẻ, chẳng hạn $n = 2k+1$ với $k \in \mathbb{N}$, thì từ cách chọn N_1 và N_2 ta có ngay
$$|a_n - a_\infty| = |a_{2k+1} - a_\infty| \leq |a_{2k} - a_\infty| + |a_{2k+1} - a_{2k}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
do $k = n/2 - 1/2 \geq N/2 = \max\{N_1, N_2\}$.

Như vậy trong mọi trường hợp ta luôn có $|a_n - a_\infty| < \varepsilon$ với mọi $n > N$, và do đó dãy số (a_n) hội tụ (đến a_∞).

Nhận xét. Dãy (a_n) là dãy tổng riêng của chuỗi đan dấu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

Chuỗi này hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

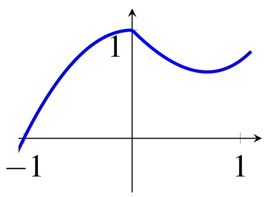
BÀI 2.

(a) Khi $x \neq 0$ thì f là hàm liên tục với mọi cách chọn a, b, và c. Vì vậy, ta chỉ cần khảo sát tính liên tục của f tại $x = 0$. Rõ ràng

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = b = f(0)$$

và

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1.$$



Vậy khi $b = 1$, a và c tùy ý thì f liên tục tại 0 và do đó liên tục trên $\mathbb{R}$. (Tham khảo hình vẽ bên với $b = 1$, $c = -2$, và $a = -1$.)

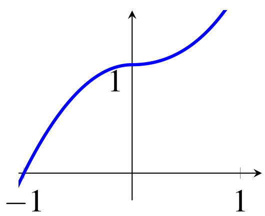
(b) Để f khả vi trên $\mathbb{R}$ thì f cần phải liên tục trên $\mathbb{R}$. Theo ý (a) ta phải có $b = 1$. Khi $x \neq 0$ thì f luôn là hàm khả vi với mọi cách chọn a và c. Vì vậy, ta chỉ cần khảo sát tính khả vi của f tại $x = 0$.

Theo định nghĩa

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{ax^2 + 1 - 1}{x} = 0$$

và

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{e^x + cx - 1}{x} = 1 + c$$

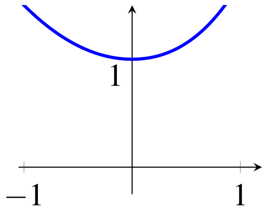


Vậy khi $c = -1$, $b = 1$, và a tùy ý thì f khả vi tại 0 và do đó khả vi trên $\mathbb{R}$. (Tham khảo hình vẽ bên với $b = 1$, $c = -1$, và $a = -1$.)

(c) Từ ý (b) ta biết rằng khi $c = -1$, $b = 1$, và a tùy ý thì hàm f khả vi trên $\mathbb{R}$. Trong trường hợp này, đạo hàm của hàm f là

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{nếu } x \leq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0, \\ e^x - 1 & \text{nếu } x > 0, \end{cases}$$

Vì vậy khi $x \neq 0$ thì f luôn là hàm khả vi cấp hai với mọi cách chọn của a. Tại $x = 0$ ta có



$$\lim_{x \to 0+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

và

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{2ax}{x} = 2a.$$

Vậy khi $c = -1$, $b = 1$, và $a = 1/2$ thì f khả vi cấp hai tại 0 và do đó khả vi cấp hai trên $\mathbb{R}$. (Tham khảo hình vẽ bên với $b = 1$, $c = -1$, và $a = 1/2$.)

BÀI 3.

(a) Đường thẳng (d) và parabol (P) không cắt nhau vì phương trình hoành độ giao điểm

$$3x^2 = 2x - 1$$

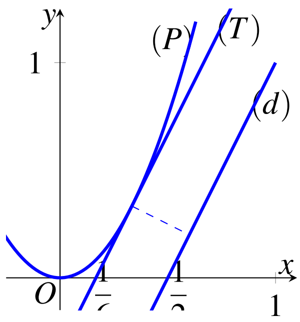
không có nghiệm thực. (Có thể thấy $3x^2 - (2x-1) = 2x^2 + (x-1)^2 > 0$.)

(b) Gọi (T) là tiếp tuyến của (P) tại $(1/3; 1/3)$. Khi đó (T) có phương trình $2x - \dfrac{1}{3}$.

Do (T) có hệ số góc 2 nên (T) song song với (d).

Ta sẽ chứng minh khoảng cách ngắn nhất giữa (d) và (P) chính là khoảng cách giữa (d) và (T) và do đó bằng

$$\frac{2\sqrt{5}}{15}.$$



Khoảng cách này đạt được tại hai điểm

$$\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \in (P) \quad \text{và} \quad \left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right) \in (d).$$

Do (T) và (d) là các đường thẳng song song nên để chứng minh khoảng cách ngắn nhất giữa (d) và (P) chính là khoảng cách giữa (d) và (T) ta chỉ cần chứng minh (P) và (d) nằm về hai phía khác nhau của (T).

Thật vậy, do phương trình

$$3x^2 = 2x - \frac{1}{3}$$

chi có nghiệm duy nhất $x = 1/3$ nên (P) và (T) chỉ cắt nhau tại điểm $(1/3;1/3)$. Điều này chứng tỏ (P) nằm về một phía so với (T).

Cuối cùng vì điểm $(1/6;0) \in (T)$ nằm giữa các điểm $(0;0) \in (P)$ và $(1/2;0) \in (d)$ nên (P) và (d) nằm về hai phía khác nhau của (T).

BÀI 4.

(a) Phản chứng

$$|f(x)| > 2024|f'(x)| \quad \text{với mọi } x \in (0,1).$$

Dễ thấy $f \neq 0$ trên $(0,1)$. Từ tính liên tục của f ta suy ra hoặc $f > 0$ hoặc $f < 0$ trên $(0,1)$. Như vậy

$$\text{hoặc} \quad f(x) > 2024|f'(x)| \quad \text{hoặc} \quad f(x) < -2024|f'(x)|$$

với mọi $x \in (0,1)$. Không mất tổng quát giả sử $f(x) > 2024|f'(x)|$ trên $(0,1)$. Khi đó

$$f(x) + 2024f'(x) > 2024|f'(x)| + 2024f'(x) \geq 0 \quad \text{trên } (0,1).$$

Tính toán trực tiếp ta thấy

$$\left(e^{x/2024} f(x)\right)' = \frac{e^{x/2024}}{2024}\left(f(x) + 2024f'(x)\right) > 0 \quad \text{với mọi } x \in (0,1).$$

Vì vậy $x \mapsto e^{x/2024} f(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên $[0,1]$ (do hàm này liên tục trên $[0,1]$). Do đó

$$0 < e^{-1/4048} f(1/2) \leq e^{-1/2024} f(1) = 0$$

Đây là điều vô lý.

(b) Xét hàm $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$g(x) = \left(f(x)\right)^2.$$

Dễ thấy $g \geq 0$, $g(1) = 0$, g liên tục trên $[0,1]$ và khả vi trong $(0,1)$. Tính toán trực tiếp ta thấy

$$1012|g'(x)| = 2024|f(x)f'(x)| \leq |f(x)|^2 = g(x) \quad \text{với mọi } x \in (0,1).$$

Lập luận tương tự như trong ý (a) ta thu được $x \mapsto e^{x/1012} g(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên $[0,1]$. Do đó với $x \in [0,1]$ bất kỳ (nhưng cố định) ta luôn có

$$0 \leq e^{-x/1012} g(x) \leq e^{-1/1012} g(1) = 0.$$

Vậy ta phải có $g(x) = 0$. Từ định nghĩa của g ta thu được $f \equiv 0$ trên $[0,1]$. Vậy f là hàm hằng trên $[0,1]$.

(c) Câu trả lời là không. Thật vậy xét hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ được cho bởi

$$f(x) = e^{x/2024}.$$

Dễ thấy f không phải là hàm hằng và

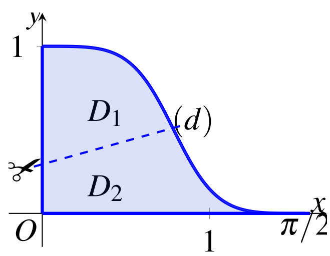
$$2024|f'(x)| = e^{x/2024} = |f(x)|.$$

đúng với mọi $x \in [0,1]$. (Không khó để thấy trong trường hợp đang xét $f(1) = e^{1/2024} > 0$.)

BÀI 5.

(a) Diện tích của D, ký hiệu bởi A, được tính bởi

$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^4}{(\sin x)^4 + (\cos x)^4} dx.$$



Sử dụng phép đổi biến $t = \pi/2 - x$ ta được

$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^4}{(\sin t)^4 + (\cos t)^4} dt.$$

Do đó

$$2A = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^4 dx}{(\sin x)^4 + (\cos x)^4} + \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^4 dx}{(\sin x)^4 + (\cos x)^4} = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy $A = \pi/4$.

(b) Giả sử $y = kx + a$ là phương trình của đường thẳng (d) tương ứng với một cách cắt thỏa mãn yêu cầu. Từ giả thiết $(\pi/4; 1/2) \in (d)$ ta thu được

$$k\frac{\pi}{4} + a = \frac{1}{2}.$$

Để ý rằng

$$\begin{aligned}\frac{(\cos x)^4}{(\sin x)^4 + (\cos x)^4} &= \frac{1}{1 + (\tan x)^4} \\ &\geq \frac{1}{1 + (\tan x)^2} \\ &= (\cos x)^2 \geq 1 - \frac{2x}{\pi} \quad \text{với } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].\end{aligned}$$

Vậy với cách cắt hiện tại miền D được chia thành hai phần D_1 và D_2 trong đó D_1 chứa điểm $(0;1)$ và D_2 chứa điểm $(0;0)$; xem hình vẽ. Do diện tích của D_1 bằng $\pi/8$ nên ta có

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8} &= \int_0^{\pi/4}\Big(\frac{(\cos x)^4}{(\sin x)^4+(\cos x)^4} - kx - a\Big)dx\\ &= \big(\frac{1}{2}-a\big)\frac{\pi}{4} - \frac{k}{2}\big(\frac{\pi}{4}\big)^2 + \int_0^{\pi/4}\frac{\cos(2x)}{2-(\sin(2x))^2}dx.\end{aligned}$$

Vậy

$$k\frac{\pi^2}{32} + a\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3+2\sqrt{2}).$$

Kết hợp các tính toán trên ta thu được

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\ln(3+2\sqrt{2}) - \frac{1}{2}.$$

(Giá trị a vùa tìm được $\approx 0,293$. Tham khảo hình vẽ.)

newpage

3 Trung học phổ thông

3.1 Ngày thứ nhất: Số học

A. Các kết quả cơ bản về dãy số Fibonacci và Lucas

BÀI 1. a) Ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Với $n = 0$ hoặc 1 ta dễ dàng kiểm tra được công thức trên. Với $n > 1$, giả sử công thức trên đúng với mọi chỉ số $t < n$, khi đó theo công thức truy hồi của dãy Fibonacci, ta có

$$\begin{aligned}F_{n+1} &= F_n + F_{n-1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n\Big) + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^{n-1} - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^{n-1}\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n + \big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^{n-1} - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^{n-1}\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^{n+1} - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^{n+1}\Big)\end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.
b) Hoàn toàn tương tự ý a).

BÀI 2. Ta có thể sử dụng công thức ở bài 1 để kiểm tra trực tiếp. là số nguyên tố. Chứng minh rằng $n = 4$ hoặc n là một số nguyên tố.

BÀI 3. a) Công thức hồi quy của dãy Fibonacci suy ra:

$$\begin{aligned} F_m &= F_{m-1} + F_{m-2} = F_2F_{m-1} + F_1F_{m-2} \\ &= F_2(F_{m-2} + F_{m-3}) + F_1F_{m-2} \\ &= (F_2 + F_1)F_{m-2} + F_2F_{m-3} \\ &= F_3F_{m-2} + F_2F_{m-3} \\ &= \cdots = F_nF_{m-n+1} + F_{n-1}F_{m-n}. \end{aligned}$$

b) Từ a) ta suy ra $(F_m, F_n) = (F_{n-1}F_{m-n}, F_n) = (F_{m-n}, F_n)$. Chú ý rằng ta đã sử dụng khẳng định sau (là hệ quả trực tiếp của Bài 2): $(F_{n-1}, F_n) = 1$ với mọi n. Bằng việc thay thế bộ (m, n) bởi $(m - n, n)$ và lặp lại lý luận như trên ta sẽ suy ra điều phải chứng minh.
c) Nếu $n \neq 4$ và n không là số nguyên tố, thì $n = pq$ với $2 \leq p \leq q$ và $q \geq 3$. Theo ý ii), ta có $(F_n, F_q) = F_{(n,q)} = F_q$. Vì $F_q \geq 2, F_n > F_q$, ta suy ra F_n là hợp số.

BÀI 4. a) Theo kết quả của bài 1, ta có

$$\begin{aligned} L_n^2 - 5F_n^2 &= \Big((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \Big)^2 - \Big((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \Big)^2 \\ &= 4.(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n.(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n = 4.(-1)^n \end{aligned}$$

b) Tương tự ý a) ta có thể sử dụng công thức tổng quát của F_n và L_n để kiểm tra trực tiếp.
c) Theo ý a) ta có 4 luôn chia hết cho (F_n, L_n). Mặt khác dễ thấy với $n > 0$ và n không chia hết cho 3 thì F_n là lẻ. Do đó $(F_n, L_n) = 1$.

BÀI 5. a) Ta có $S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{3}{4}$. Với $n \geq 3$, ta có:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{i=3}^{n} \frac{F_i}{2^i} \\ &= \frac{3}{4} + \sum_{i=3}^{n} \frac{F_{i-1} + F_{i-2}}{2^i} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n} \frac{F_{i-1}}{2^{i-1}} + \frac{1}{4}\sum_{i=3}^{n} \frac{F_{i-2}}{2^{i-2}} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1} \frac{F_i}{2^i} + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-2} \frac{F_i}{2^i} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}S_{n-1} + \frac{1}{4}S_{n-2}. \end{aligned}$$

b) Bằng quy nạp theo n, từ công thức hồi quy ở ý a), ta có thể dễ dàng chứng minh được $S_n < 2$.

B. Một số tính chất khác của dãy số Fibonacci và Lucas

BÀI 6. Câu trả lời là không. Giả sử ta có thể phân tích $\mathbb{N}^*$ thành hợp của m $F-$dãy. Khi đó xét $2m+1$ số liên tiếp $2m, 2m+1, \cdots, 4m$, thì sẽ tồn tại 3 số trong đó thuộc cùng một $F-$dãy. Tuy nhiên ta thấy rằng tổng của 2 số bất kỳ trong 3 số đó luôn lớn hơn số còn lại. Điều này là vô lý.

BÀI 7. Nếu $m \geq k+2$, thì $F_m \geq F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \geq 2F_k$. Khi đó $x_1 \leq \frac{1}{2}$. Từ định nghĩa của $\{x_n\}$ ta có thể chứng minh bằng quy nạp $x_n \leq 0$ với mọi $n \geq 2$, đặc biệt số 1 không xuất hiện trong dãy. Như vậy m phải bằng $k+1$.
Mặt khác, với bất kỳ $k \in \mathbb{N}^*$, nếu $m = k+1$, thì trừ trường hợp $k = 1$ ta sẽ có

$$x_2 = \frac{2F_k - F_{k+1}}{F_{k+1} - F_k} = \frac{F_{k-2}}{F_{k-1}}.$$

Từ đó suy ra nếu $k = 2n+1$ thì $x_{n+1} = \frac{F_1}{F_2} = 1$. Và nếu $k = 2n$, thì $x_n = \frac{1}{2}$, và các số tiếp theo sẽ luôn nhỏ hơn hoặc bằng 0. Ta kết luận rằng trường hợp k là số chẵn chẵn thì dãy $\{x_n\}$ sẽ không chứa 1.
Vậy bộ số nguyên dương (k,m) ta cần tìm là $(2n-1, 2n), n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI 8. Với $m = 1$, mệnh đề hiển nhiên đúng. Ta xét $m \geq 2$.
Đầu tiên ta chỉ ra rằng dãy phần dư modulo m : $\{F_n (\text{mod } m)\}$ là tuần hoàn. Thật vậy, chú ý rằng các cặp số Fibonacci liên tiếp (F_n, F_{n+1}) chỉ có m^2 khả năng xảy ra khi xét modulo m. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai số $n < k$ sao cho $(F_n, F_{n+1}) \equiv (F_k, F_{k+1})$ (mod m). Theo công thức hồi quy của dãy Fibonacci, ta suy ra dãy Fibonacci mod m là tuần hoàn.
Từ $F_1 = F_2 \equiv 1$ (mod m), suy ra tồn tại $p \in \mathbb{N}^*$, thỏa mãn $F_{p+1} \equiv F_{p+2} \equiv 1$ (mod m), vì vậy $F_p \equiv 0$ (mod m), $F_{p-1} \equiv 1$(mod m), $F_{p-2} \equiv -1$(mod m). Tổng quát hơn, với mọi $t \in \mathbb{N}^*$ thì $F_{tp-2} \equiv -1$ (mod m). Lấy $n = tp-2$, thì

$$F_n^4 - F_n - 2 \equiv 1 + 1 - 2 \equiv 0 \,(\text{mod } m).$$

Mệnh đề được chứng minh.

BÀI 9. Ta gọi $f(n)$ là số tiền nhỏ nhất (đơn vị là 10.000 vnđ) cần phải trả để biết được số bạn Thịnh chọn trong tập $\{1, 2, \cdots, n\}$. Khi đó dễ thấy $f(n)$ là hàm không giảm theo n. Hơn thế nữa, nếu tập M đầu tiên mà bạn Vượng chọn là một tập có m phần tử thì

$$f(n) \leq \max\{f(m)+2, f(n-m)+1\}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $f(n) = k$, ở đó k là chỉ số duy nhất thỏa mãn $F_k < n \leq F_{k+1}$.
Đầu tiên ta chỉ ra bằng quy nạp theo n rằng, với bất kỳ $n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$f(F_{n+1}) \leq n.$$

Thật vậy, với $n = 2$ thì hiển nhiên, giả sử mệnh đề trên đúng với mọi số nguyên dương nhỏ hơn n. Ta xét trường hợp mà bạn Vượng chọn lần đầu tiên một tập con có F_{n-1} phần tử. Khi đó ta có

$$f(F_{n+1}) \leq \max\{f(F_{n-1}) + 2, f(F_n) + 1\} \leq n.$$

Tiếp theo ta chỉ ra rằng: với bất kỳ $n \in \mathbb{N}^*, F_n < x \leq F_{n+1}$ thì ta có $f(x) \geq n$.
Với $n = 1, 2$ mệnh đề trên đúng hiển nhiên. Giả sử mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương nhỏ hơn n. Ta xét trường hợp với $n \geq 3$, và bất kỳ $F_n < x \leq F_{n+1}$.
Nếu số phần tử bạn Vượng chọn đầu tiên là $\leq F_{n-2}$ thì số tiền nhỏ nhất bạn Vượng cần phải trả là $\geq f(x - F_{n-2}) + 1 \geq f(F_{n-1} + 1) + 1 \geq n$. Nếu số phần tử bạn Vượng chọn đầu tiên $\geq F_{n-2} + 1$ thì số tiền nhỏ nhất bạn Vượng cần trả là $\geq f(F_{n-2} + 1) + 2 \geq (n - 2) + 2 = n$. Vì vậy $f(x) \geq n$.
Áp dụng vào trường hợp $F_{11} = 89 < 100 < F_{12} = 144$, ta kết luận rằng bạn Vượng cần chuẩn bị ít nhất là 110.000vnđ. Ta cũng dễ dàng chỉ ra một cách cho bạn Vượng với 110.000vnđ.

BÀI 10. Trước hết bằng quy nạp hoặc sử dụng công thức tổng quát của L_n ta có thể dễ dàng chứng minh được đẳng thức sau:

$$L_{n+1}^2 - L_{n+1}L_n - L_n^2 = 5.(-1)^{n+1},$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$.
Nếu $a \neq 2$ là một phần tử trong dãy số Lucas, đặt $a = L_n$, với $n \geq 1$. Khi đó từ đẳng thức trên, nếu đặt $b = L_{n-1}$ thuộc $\mathbb{N}^*$, ta có:

$$a^2 - ab - b^2 = \pm 5.$$

Ngược lại, giả sử $a, b \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$a^2 - ab - b^2 = \pm 5.$$

Ta chia thành hai trường hợp như sau:

TH 1: $a^2 - ab - b^2 = 5$. Khi đó tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a = L_{2n}, b = L_{2n-1}$. Thật vậy, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo b. Nếu $b = 1$ thì $a = 3 = L_2$ do đó mệnh đề trên đúng với $b = 1$. Nếu $b = 2$ thì phương trình $a^2 - 2a = 9$ không có nghiệm nguyên dương. Nếu $b > 2$, giả sử mệnh đề đúng với tất cả các cặp số nguyên dương (b_0, a_0) với $b_0 < b$. Ta đặt $b_0 = 2b - a$, và $a_0 = a - b$. Dễ thấy $a > b + 1$, và từ

$$a^2 = ab + b^2 + 5 < ab + b(b+2) \leq 2ab,$$

ta suy ra $a < 2b$. Vì thế,

$$0 < b_0 < b, \text{ và } 0 < a_0.$$

Hơn thế nữa,

$$a_0^2 - a_0 b_0 - b_0^2 = (a-b)^2 - (a-b)(2b-a) - (2b-a)^2 = a^2 - ab - b^2 = 5.$$

Từ giả thiết quy nạp, ta có $b_0 = L_{2i-1}$ và $a_0 = L_{2i}$ với số nguyên dương i nào đó. Khi đó

$$b = b_0 + a_0 = L_{2i-1} + L_{2i} = L_{2i+1} \text{ và } a = a_0 + b = L_{2i+2}.$$

Mệnh đề được chứng minh.

TH 2: $a^2 - ab - b^2 = -5$. Khi đó tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a = L_{2n-1}, b = L_{2n-2}$. Thật vậy, ta có

$$(b+a)^2 - (b+a)a - a^2 = b^2 + 2ab - ab - a^2 = -(-5) = 5.$$

Theo kết quả của trường hợp 1, tồn tại số nguyên dương i sao cho $a = L_{2i-1}$ và $a + b = L_{2i}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

3.2 Ngày thứ hai: Tổ hợp

A. Ước lượng số cặp điểm có khoảng cách 1 trên mặt phẳng.

Bài 1. Theo quy tắc nhân, ta có $|\mathscr{P}| = 11^2 = 121$.
Để tính $f(\mathscr{P})$, ta nối các đoạn thẳng giữa các cặp điểm có khoảng cách 1, khi đó ta được bảng vuông 10×10. Tính các đoạn thẳng ở các hàng, các cột, ta được

$$f(\mathscr{P}) = 10 \times 11 \times 2 = 220.$$

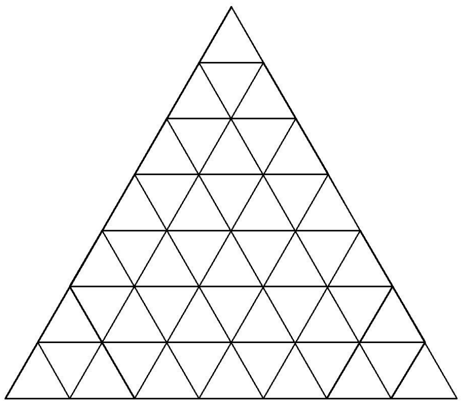
Bài 2. Với mô hình hình thoi cạnh 1 gồm 2 tam giác đều chung cạnh ghép lại, ta suy ra $f(4) \geq 5$. Mặt khác, hiển nhiên $f(4) \leq 6$. Ta chứng minh $f(4) = 5$ hay mô hình $f(4) = 6$ không thể xảy ra. Phản chứng, giả sử tồn tại 4 điểm A, B, C, D có khoảng cách đôi một bằng 1. Khi đó ABC, ABD là 2 tam giác đều, mà A khác D, do đó $ABDC$ là 4 đỉnh của một hình thoi cạnh 1 có $\angle BAD = 60^\circ$.

Từ đây tính được $AD = \sqrt{3}$, mâu thuẫn.
Vậy $f(4) = 5$.

BÀI 3. Chọn $n_0 = 10^{10}$. Với mỗi số nguyên dương $n > n_0$, gọi K là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $\frac{K(K+1)}{2} \le n$. Nói cách khác, ta có

$$K(K+1) \le 2n < (K+1)(K+2).$$

Xét mô hình tháp tam giác như hình dưới với đáy gồm K điểm. Ở đây mỗi



cạnh của tam giác nhỏ có độ dài bằng 1, và có tất cả $K(K+1)$, ta chọn thêm các điểm tùy ý để có đủ n điểm. Số cạnh (hay số cặp điểm có khoảng cách 1) trong tháp tam giác trên là

$$\frac{3(K-1)K}{2}.$$

Với $n > 10^{10}$ suy ra $K > 10^4$, dễ dàng chứng minh được khi đó

$$\frac{3(K-1)K}{2} > \frac{2(K+1)(K+2)}{2} > 2n.$$

Từ đây suy ra $f(n) > 2n$ với mọi $n > n_0$.

BÀI 4. Ta xây dựng quy nạp mô hình gồm 2^K điểm sao cho mỗi điểm trong hệ có ít nhất K điểm khác cách điểm này khoảng cách 1.
Với $K = 2$, dễ thấy có mô hình tam giác đều cạnh 1 thỏa mãn yêu cầu.
Giả sử tồn tại H_K là tập 2^K điểm sao cho mỗi điểm trong hệ có ít nhất K điểm khác cách điểm này khoảng cách 1. Chọn véc tơ $\overrightarrow{u}$ độ lớn 1 và không cùng phương với bất kì cặp điểm nào trong H_K, tịnh tiến H_K theo $\overrightarrow{u}$ ta thu được H'_K. Khi đó tập $H_{K+1} = H_K \cup H'_K$ gồm 2^{K+1} điểm sao cho mỗi điểm trong hệ có ít nhất $K+1$ điểm khác cách điểm này khoảng cách 1.
Theo nguyên lí quy nạp, khẳng định ban đầu được chứng minh.
Chọn $n = 2^K$, chọn tập điểm H_K như trên, khi đó ta có

$$f(H_K) \ge \frac{2^K K}{2}.$$

Suy ra
$$f(n) \geq cn\log n.$$
Khẳng định này trực tiếp suy ra mệnh đề cần chứng minh ở đề bài.

BÀI 5.

a) Có n cách chọn A, $n-1$ cách chọn B và với mỗi bộ 2 điểm A và B, có tối đa 2 điểm C thỏa mãn $CA = CB = 1$. Do đó $|T| \leq 2n(n-1)$.

b) Với mỗi C, có $d(C)$ cách chọn A và $d(C)-1$ cách chọn B, do đó theo quy tắc cộng ta có
$$|T| = \sum_{C\in\mathscr{P}_n} d(C)(d(C)-1) = \sum_{X\in\mathscr{P}_n} d(X)(d(X)-1).$$

c) Áp dụng bổ đề bắt tay, ta có $\sum\limits_{X\in\mathscr{P}_n} d(X) = 2f(\mathscr{P}_n) \leq 2f(n)$.

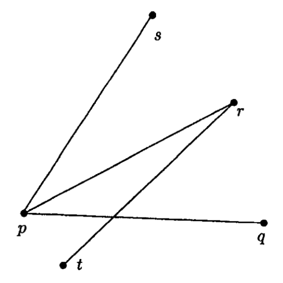
BÀI 6. Từ bài 5, ta có
$$2n(n-1) \geq \sum_{X\in\mathscr{P}_n} d(X)(d(X)-1) = \sum_{X\in\mathscr{P}_n} d^2(X) - \sum_{X\in\mathscr{P}_n} d(X).$$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, ta thu được
$$2n(n-1) \geq \frac{\left(\sum\limits_{X\in\mathscr{P}_n} d(X)\right)^2}{n} - \sum_{X\in\mathscr{P}_n} d(X) = \frac{(2f(\mathscr{P}_n))^2}{n} - 2f(\mathscr{P}_n)$$
Sử dụng tính chất hiển nhiên $2f(\mathscr{P}_n) < n^2$ ta suy ra
$$3n^3 > (2f(\mathscr{P}_n))^2$$
Do đó
$$f(\mathscr{P}_n) < cn^{3/2}$$
và lưu ý rằng bất đẳng thức này đúng với mọi $\mathscr{P}_n$, nên ta thu được
$$f(n) < cn^{3/2}.$$

B. Ước lượng số cặp điểm có khoảng cách 1 trong các tập đặc biệt.

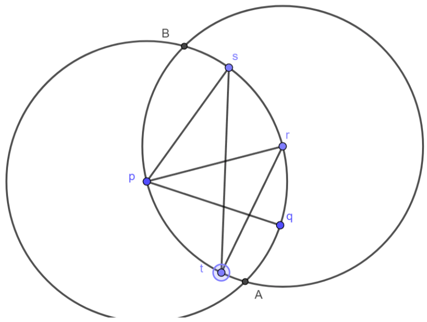
BÀI 7. Từ mô hình của bài 3, (thỏa mãn tính chất rộng rãi của tập điểm), để suy ra kết quả bài toán, ta chỉ cần chứng minh $f^{rr}(n) \leq 3n$ là xong.
Khẳng định trên được suy trực tiếp từ nhận xét
$$d(X) \leq 6$$

với mọi $X \in \mathscr{P}_n$.
Thật vậy, giả sử tồn tại điểm $X \in \mathscr{P}_n$ sao cho có 7 điểm $A_1;A_2;\ldots;A_7 \in \mathscr{P}_n$ có khoảng cách tới X bằng 1. Khi đó có 7 góc xung quanh X có tổng bằng 360°, nên tồn tại 1 góc, giả sử là $\angle A_1XA_2 < 60^\circ$, khi đó $A_1A_2 < 1$, mâu thuẫn với giả thiết rộng rãi của tập điểm. Từ đây ta có điều phải chứng minh.

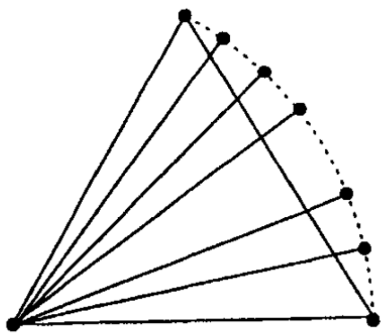
Bài 8. Xét P_n là một tập chật chội n điểm trên mặt phẳng có số cặp điểm khoảng cách 1 là lớn nhất. Ta xây dựng đồ thị G_n với các đỉnh thuộc P_n và 2 đỉnh được gọi là kề nhau nếu 2 điểm tương ứng có khoảng cách 1.
Ta đi chứng minh $|E(G_n)| \leq n$ bằng quy nạp.
Khẳng định hiển nhiên đúng với $n = 3$. Với $n > 3$, giả sử mệnh đề đã được chứng minh với tất cả các số nguyên dương nhỏ hơn n.
Nếu G_n có 1 đỉnh v bậc tối đa 1, xóa đỉnh v và cạnh kề với nó (nếu có), kết hợp với giả thiết quy nạp, ta có điều phải chứng minh.
Do đó, ta có thể giả sử tất cả các đỉnh trong G_n đều có bậc lớn hơn hoặc bằng 2.
Nếu tất cả các đỉnh đều bậc 2, hiển nhiên $|E(G_n)| = n$, ta có điều phải chứng minh.
Ta sẽ chứng minh trường hợp có 1 đỉnh bậc ≥ 3 không xảy ra. Thật vậy, xét trường hợp tồn tại đỉnh p kề với 3 đỉnh q,r,s. Không mất tính tổng quát, giả sử $\angle qpr < \angle qps \leq \frac{\pi}{3}$. (Chặn trên $\frac{\pi}{3}$ được suy từ tính chất chật chội của tập điểm). Xem ảnh dưới.



Gọi t là điểm khác p kề với r. Khi đó một trong 2 đoạn thẳng ps hoặc pq không cắt với rt. Giả sử ps không cắt rt. Kết hợp với điều kiện $pt < 1$, khi đó t phải thuộc cung nhỏ pA (ảnh dưới). Khi này dễ dàng suy ra $st > sq = 1$, vô lí.



Vậy trong tất cả các trường hợp, ta đều có $|E(G_n)| \leq n$. Dấu bằng trong trường hợp này khá đơn giản, có thể tham khảo mô hình dưới đây:



C. Ước lượng số cặp điểm có khoảng cách 1 trong không gian.

BÀI 9. Để chứng minh bất đẳng thức đầu tiên, ta xây dựng mô hình như sau: Xét lưới nguyên trong không gian

$$Q = \{(i, j, k) | 1 \leq i, j, k \leq \left\lfloor n^{1/3} \right\rfloor\}$$

có tối đa n điểm. Khi đó với 2 điểm $M = (i, j, k); M' = (i', j', k') \in Q$, ta có khoảng cách

$$MM'^2 = |i - i'|^2 + |j - j'|^2 + |k - k'|^2$$

nhận tối đa $3n^{2/3}$ giá trị. Như vậy, theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại một khoảng cách được xuất hiện với số lần tối thiểu là

$$\frac{C^2_{|Q|}}{3n^{2/3}} \geq cn^{4/3}.$$

Vị tự mô hình trên với tỉ lệ thích hợp, ta thu được điều phải chứng minh của bài toán.

Với bất đẳng thức thứ 2, ta tiếp tục sử dụng đồ thị hóa tương tự bài 6 và có nhận xét sau:
3 điểm A, B, C bất kì trong hệ n điểm có tối đa 2 điểm cách đều A, B, C khoảng cách 1 (giao điểm của 3 mặt cầu bán kính 1).
Nói cách khác, đồ thị G_n tương ứng với mô hình n điểm không chứa đồ thị con $K_{3,3}$. Như vậy kết quả cần chứng minh của bài toán là hệ quả trực tiếp của bổ đề sau:

Bổ đề: Cho đồ thị G có n đỉnh, m cạnh, không chứa đồ thị con $K_{3,3}$ thì

$$m \leq cn^{5/3}.$$

Chứng minh bổ đề: Ta sử dụng phương pháp đếm bằng 2 cách. Gọi T là số các bộ $(\{u, v, z\}, w)$ sao cho w kề với cả ba đỉnh u, v, z. Khi đó, nếu tính theo bộ ba $\{u, v, z\}$ và sử dụng giả thiết G không chứa $K_{3,3}$ ta được

$$T \leq 2C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}.$$

Tiếp theo, đếm theo w, ta được

$$T = \sum_{w \in V_G} C_{d(w)}^3 = \sum_{w \in V_G} \frac{d(w)(d(w)-1)(d(w)-2)}{6}$$

Xét hàm số $g : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ được xây dựng như sau

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{6} & \text{với} \quad x \geq 2 \\ g(x) = 0 & \text{với} \quad 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

Sử dụng đạo hàm cấp 2, dễ dàng kiểm tra được $g(x)$ là hàm lồi. Sử dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi ta có

$$T = \sum_{w \in V_G} g(d(w)) \geq ng\left(\frac{\sum\limits_{w \in V_G} d(w)}{n}\right) = ng\left(\frac{2m}{n}\right).$$

Trường hợp 1: $\dfrac{2m}{n} < 2$. Hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.
Trường hợp 2: $\dfrac{2m}{n} \geq 2$. Khi này ta có

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3} \geq n \frac{\frac{2m}{n}\left(\frac{2m}{n} - 1\right)\left(\frac{2m}{n} - 2\right)}{6}.$$

Biến đổi tương đương

$$n^3(n-1)(n-2) \geq 2m(2m-n)(m-n).$$

Từ đây so sánh bậc 2 vế, dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

BÀI 10. Với mỗi $\mathscr{R}_n$, ta xét đồ thị G với tập đỉnh $V = \mathscr{R}_n$ và 2 đỉnh $A_i; A_j$ được gọi là kề nhau nếu $2023 < A_iA_j < 2024$. Khi này $T(\mathscr{R}_n)$ chính là số cạnh của đồ thị G. Ta sẽ chứng minh với n đủ lớn,

$$T(\mathscr{R}_n) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

với mọi $\mathscr{R}_n$.
Thật vậy, với mỗi điểm A_i, tất cả các điểm A_j kề với A_i đều nằm trong hình tròn bán kính 2024. Lấy các điểm A_j làm tâm, vẽ hình tròn bán kính $1/2$, khi đó ta thu được $d(A_i)$ hình tròn không có điểm chung trong nằm hoàn toàn bên trong hình tròn lớn bán kính $2024 + 1/2$. So sánh diện tích ta thu được $d(A_i) < 4049^2$ với mọi A_i.
Suy ra

$$2T(\mathscr{R}_n) = \sum_{i=1}^{n} d(A_i) < n.4049^2 < \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

với mọi $\mathscr{R}_n$ mà $n > 10^9$. Từ đây ta suy ra được điều phải chứng minh.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

1 MA TRẬN

Bài 1.1 (ĐH Công nghệ Thông tin). Xét hệ phương trình tuyến tính $(A+B+I)X = 0$ hay $(B+I)X = -AX$. Khi đó

$$-A^2X = A(B+I)X = (AB+A)X = (BA+A)X = (B+I)AX = -(B+I)^2X$$

Tiếp tục quá trình như trên, ta có $(B+I)^kX = (-1)^kA^kX$. Vì $A^{2024} = I$ nên $(B+I)^{2024}X = X$ hay $((B+I)^{2024} - I)X = 0$. Mặt khác $(B^{2023} - I)X = 0$ (vì $B^{2023} = I$).
Xét các đa thức $p(t) = (t+1)^{2024} - 1$ và $q(t) = t^{2023} - 1$. Nghiệm của đa thức $p(t)$ có dạng $-1+\cos\dfrac{2k\pi}{2024} + i\sin\dfrac{2k\pi}{2024}$ với $k = 0, 1, \ldots, 2023$. Nghiệm của đa thức $q(t)$ có dạng $\cos\dfrac{2m\pi}{2023} + i\sin\dfrac{2m\pi}{2023}$ với $m = 0, 1, \ldots, 2022$. Ta thấy rằng $p(t)$ và $q(t)$ không có nghiệm chung. Như vậy $p(t)$ và $q(t)$ là 2 đa thức nguyên tố cùng nhau. Khi đó tồn tại các đa thức $r(t), s(t)$ sao cho

$$r(t)p(t) + s(t)q(t) = 1.$$

Khi đó $X = (r(B)p(B) + s(B)q(B))X = r(B)(p(B)X) + s(B)(q(B)X) = 0$. Như vậy hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(A+B+I)X = 0$ chỉ có nghiệm tầm thường. Do đó $A+B+I$ khả nghịch.

Bài 1.2 (ĐH Công nghệ Thông tin). Ta cần tìm các ma trận S, T sao cho

$$M = S^{-1}NS, P = T^{-1}QT$$

Ta chọn các ma trận

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \text{ và } T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ -iI_n & -I_n \end{bmatrix}.$$

Bài 1.3 (ĐH Công nghệ Thông tin). Ta thấy $a = b = 0$ không thỏa mãn bài toán.
Giả sử $a^2 + b^2 \neq 0$, nghĩa là a, b không đồng thời bằng 0. Khi đó

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

và $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^4 = (a^2+b^2)^2 \begin{bmatrix} \cos 4t & -\sin 4t \\ \sin 4t & \cos 4t \end{bmatrix}$. Suy ra $a^2+b^2=\sqrt{2}$ và dẫn đến

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \cos 4t = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có phương trình

$$2(\sqrt{2}a^2-1)^2-1=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

có nghiệm a, b thỏa mãn

$$a^2 = \frac{2\sqrt{2}+(1+\sqrt{3})}{4}; b^2 = \frac{2\sqrt{2}-(1+\sqrt{3})}{4}$$

hoặc

$$a^2 = \frac{2\sqrt{2}-(1+\sqrt{3})}{4}; b^2 = \frac{2\sqrt{2}+(1+\sqrt{3})}{4}.$$

Bài 1.4 (ĐH Giao thông Vận tải). Đặt $A = 3I + M$ với ma trận M là $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính toán trực tiếp ta thu được $M^2 = 0$. Do đó

$$\begin{aligned} A^{2024} &= (3I+M)^{2024} = 3^{2024}I + 3^{2023}2024M = 3^{2023}(3I+2024M) \\ &= 3^{2023} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2024 & -2024 \\ 0 & -2021 & 0 & -2024 \\ 0 & 2024 & 3 & 2024 \\ 0 & 2024 & 0 & 2027 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bài 1.5 (ĐH Đồng Tháp). Ta có

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 1.6 (ĐH Tân Trào). Ta có $A = 24I + 5B, B = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix} \to A^n = (24I + 5B)^n$.

$B^3 = B^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ Dễ thấy, $B^n = B^2$ với mọi $n \geq 2$ (Chứng minh bằng quy nạp theo $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$).
Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (24I)^{n-k}(5B)^k = 24^n I + n24^{n-1}5B + B^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 24^{n-k}5^k \\ &= 24^n I + 5n24^{n-1}B + B^2 \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 24^{n-k}5^k - 24^n - 5n24^{n-1} \right] \\ &= 24^n I + 5n24^{n-1}B + (29^n - 24^n - 5n24^{n-1})B^2. \end{aligned}$$

Tổng các phần tử trên đường chéo chính của B, B^2 đều có giá trị là 1. Do đó $S = 29^n + 2 \times 24^n$.

2 ĐỊNH THỨC

Bài 2.1 (ĐH Mỏ-Địa chất). Giả sử $B = (b_{ij})$, trong đó b_{ij} bằng 1 nếu j là nhân tử của i và bằng 0 trong các trường hợp còn lại. Điều đó có nghĩa là ma trận này là ma trận tam giác với đường chéo chứa các số 1. Khi đó, ma trận $A = (a_{ij})$ sẽ bằng $A = BB^T$, trong đó B^T là ma trận chuyển. Từ đó suy ra $\det A = (\det B)(\det B^T) = (\det B)^2 = 1$.

Bài 2.2 (ĐH Đồng Tháp). Khai triển định thức theo dòng cuối để được $\Delta_n = a\Delta_{n-1} + \Delta_{n-2}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2.3 (ĐH Tân Trào). Đặt $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$. Ta có

$$D_n(x) = (x+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & x & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix} = (x+n-1)\Lambda.$$

Thực hiện các biến đổi sơ cấp trên dòng và cột của D, ta có

$$\Lambda = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & x-1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-3 & x-1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-1 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x-1 \end{vmatrix}_{n-1} = D_{n-1}(x-1).$$

Suy ra,

$$D_n = (x+n-1)D_{n-1}(x-1) = (x+n-1)(x+n-3)D_{n-2}(x-2).$$

Do đó, khi $n = 2k$, thì

$$D_{2k} = (x^2-1)(x^2-9)\cdots[x^2-(2k-1)^2].$$

Vậy, với $n = x = 2024$ ta nhận được $D = (2024^2-1)(2024^2-3^2)...(2024^2-2023^2)$.

Bài 2.4 (ĐH Vinh)**.** Từ định nghĩa định thức ta suy ra ma trận vuông có tất cả các phần tử đều là số nguyên thì định thức của ma trận đó cũng là số nguyên. Theo tính chất đồng dư, ta có $\det A \equiv \det B \pmod 2$, trong đó

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 0 \end{pmatrix}_{2024\times 2024}.$$

Ta kiểm tra được rằng

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2023 & 2022 & ... & 2022 \\ 2022 & 2023 & ... & 2022 \\ ... & ... & ... & ... \\ 2022 & 2022 & ... & 2023 \end{pmatrix}_{2024\times 2024}.$$

Ta có $\det(B^2) \equiv \det(I_{2024}) = 1 \pmod 2$, trong đó I_{2024} ký hiệu là ma trận đơn vị cấp 2024. Hơn nữa, $\det(B^2) = (\det B)^2$ nên ta suy ra $\det B$ là một số nguyên lẻ. Điều này kéo theo $\det A$ cũng là một số nguyên lẻ. Do đó, $\det A \neq 0$, nghĩa là A là ma trận khả nghịch.

Bài 2.5 (ĐH Hải Phòng)**.** Ta có $\det A = -4x^2 - 16x - 12$. Khi đó

$$\operatorname{rank} A = 4 \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3, -1.$$

- Với $x = -3$ ta có

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank} A = 3.$$

- Với $x = -1$ ta có

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank} A = 3.$$

Vậy

$$\operatorname{rank} A = \begin{cases} 4, & \text{khi } x \neq -3, -1 \\ 3, & \text{khi } x = -3, -1. \end{cases}$$

Bài 2.6 (ĐH Trà Vinh). (a) Ta có $A^{-1} = A \Rightarrow A^2 = I$. Từ đó

$$(I - A)^2 = A^2 - 2A + I = 2(I - A),$$

dẫn đến $|\det(I - A)|^2 = |\det(2(I - A))| = 2^n |\det(I - A)|$. Từ đây có điều phải chứng minh.

(b) Ta có $A^{2k+1} - A = A(A^{2k} - I)$ nên

$$|\det(A^{2k+1} - A)| = |\det(A)||\det(A^{2k} - I)|.$$

Vì $A^{-1} = 4A$ nên $I = 4A^2$, dẫn đến

$$A^{2k} - I = \left(\frac{1 - 4^k}{4^k}\right) I.$$

Do đó

$$|\det(A^{2k} - I)| = \left(\frac{4^k - 1}{4^k}\right)^n.$$

Mặt khác, vì $A^2 = 4I$ nên

$$|\det(A)| = \frac{1}{2^n}.$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.7 (ĐH Trà Vinh). Đặt $a_1a_2a_3 = 13m$, $b_1b_2b_3 = 13n$, $c_1c_2c_3 = 13p$. Ta có

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 100a_1+10a_2+a_3 \\ b_1 & b_2 & 100b_1+10b_2+b_3 \\ c_1 & c_2 & 100c_1+10c_2+c_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 13m \\ b_1 & b_2 & 13n \\ c_1 & c_2 & 13p \end{vmatrix} \\
&= 13\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & m \\ b_1 & b_2 & n \\ c_1 & c_2 & p \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

chia hết cho 13.

3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 3.1 (Đại học Đồng Tháp). Gọi y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 lần lượt là số cây ban đầu, sau tháng thứ nhất, thứ hai, thứ ba và thứ tư. Ta có hệ

$$\begin{pmatrix} -11 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 10 \\ 10 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1000 \\ -2000 \\ -900 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Giải hệ ta được $y_0 = y_1 = 1000, y_2 = y_3 = 900$. Cuối cùng $y_4 = 950$.

Bài 3.2 (Đại học Giao thông Vận tải). Ký hiệu x_1, x_2, x_3 tương ứng là số sản phẩm A, B, C mà người thứ nhất đã mua. Số sản phẩm A, B, C mà người thứ hai đã mua tương ứng là $\frac{3}{2}x_1, \frac{3}{4}x_2, 2x_3$. Tiếp theo số sản phẩm A, B, C mà người thứ ba đã mua tương ứng là $\frac{1}{2}x_1, \frac{9}{4}x_2, 3x_3$. Từ số liệu về tổng sản phẩm mà người thứ nhất, thứ hai và thứ ba đã mua ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 40 \\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 + 2x_3 &= 55 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{9}{4}x_2 + 3x_3 &= 61 \end{cases}$$

Giải hệ trên theo phương pháp khử Gauss ta thu được $x_1 = 20, x_2 = 12, x_3 = 8$.

Ký hiệu y_1, y_2, y_3 là tương ứng là giá bán của các mặt hàng A, B, C. So sánh sự khác nhau về số lượng từng loại sản phẩm được mua của 4 người ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 10y_1 - 3y_2 + 8y_3 & = & 420.000 \\ -10y_1 + 15y_2 + 16y_3 & = & 1.500.000 \\ -15y_1 + 21y_2 - 6y_3 & = & 660.000 \end{cases}$$

Giải hệ trên theo phương pháp khử Gauss ta thu được $y_1 = 20.000, y_2 = 60.000, y_3 = 50.000$. Do đó ta tính được số tiền người thứ nhất phải trả khi mua hàng là 1.520.000 đồng.

4 KHÔNG GIAN VÉCTƠ

Bài 4.1 (Đại học Giao thông Vận tải).

(a) Do $M \neq N$ và $N \subset (M+N)$ nên $M \neq (M+N)$. Kết hợp $M \subset (M+N)$ và $M \neq (M+N)$ ta suy ra $\dim(M+N) > \dim M = 2023$. Mặt khác $(M+N) \subset \mathbb{R}^{2024}$ nên $\dim(M+N) \leqslant 2024$. Kết hợp các phân tích này ta suy ra $\dim(M+N) = 2024$. Sử dụng đẳng thức

$$\dim M + \dim N = \dim(M+N) + \dim(M \cap N)$$

ta suy ra $\dim(M \cap N) = 2022$.

(b) Ta cần chỉ ra $(M \cap N) \not\subset P$. Thực vậy, nếu $(M \cap N) \subset P$ thì kết hợp với $(M \cap N) \subset N$ ta suy ra $(M \cap N) \subset (N \cap P)$. Theo câu a, $(M \cap N)$ là một không gian con 2022 chiều của $\mathbb{R}^{2024}$ và chứng minh tương tự ta cũng có $(N \cap P)$ là một không gian con 2022 chiều của $\mathbb{R}^{2024}$. Như vậy từ bao hàm thức $(M \cap N) \subset (N \cap P)$ ta suy ra $(M \cap N) = (N \cap P)$ nhưng điều này lại trái với giả thiết. Như vậy, ta phải có $(M \cap N) \not\subset P$ như đã nhắc đến ở trên.

Sử dụng $(M \cap N) \not\subset P$ và phân tích tương tự như câu a, ta suy ra được $\dim((M \cap N) + P) = 2024$. Như vậy từ đẳng thức

$$\dim(M \cap N) + \dim P = \dim((M \cap N) + P) + \dim(M \cap N \cap P)$$

ta thu được $\dim(M \cap N \cap P) = 2021$.

Bài 4.2 (ĐH Mỏ-Địa chất). Đặt các véc tơ có gốc tại tâm O. Nếu các điểm cuối của các véc tơ không tạo thành một tam giác nhọn thì tất cả các mút (điểm cuối của véc tơ) này đều nằm trên nửa đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Lấy đối xứng một véc tơ (giả sử lấy véc tơ ở giữa). Khi đó các điểm cuối của hai véc tơ cũ và điểm cuối của véc tơ đối xứng ảnh tạo thành một tam giác nhọn. Giả sử các véc tơ mới là (x, y, z). Trong đó có hai véc tơ cũ từ bộ (u, w, z) – các véc tơ này lấy dấu dương, và một véc tơ lấy đối xứng – véc tơ này lấy dấu âm. Giả sử $h = x + y + z$. Ta đi tìm các tích vô hướng của các cặp véc tơ sau:

$$\begin{aligned}
< h - x, y - z > = < y + z, y - z > = |y|^2 - |z|^2 = 0,\\
< h - y, x - z > = < x + z, x - z > = |x|^2 - |z|^2 = 0,\\
< h - z, y - x > = < y + x, y - x > = |y|^2 - |x|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Điều đó có nghĩa h chính là véc tơ có gốc ở gốc tọa độ và đỉnh chính là giao điểm của ba đường cao của tam giác, Tức là h nằm trong đường tròn đơn vị với bán kính bằng 1. Đây chính là điều phải chứng minh.

Bài 4.3 (ĐH Hải Phòng)**.**

(a) Với $\lambda = 0$, ta có

$$\varphi(p(x)) = x(x+1)p'(x) - 2xp(x).$$

Xét đa thức $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, ta có $\varphi(p(x)) = 0$ hay

$$x(x+1)(2ax+b) - 2x(ax^2+bx+c) = 0 \Leftrightarrow (2a-b)x^2 + (b-2c)x = 0.$$

Suy ra

$$\begin{cases} 2a - b = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = a \end{cases}.$$

Vậy $p(x) = a(x^2 + 2x + 1)$. Ta có $\{x^2 + 2x + 1\}$ là một cơ sở của $\mathrm{Ker}\,\varphi$ và $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = 1$.

Xét đa thức $q(x) = \varphi(p(x)) \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, ta có

$$q(x) = 2ax^2 + b(-x^2 + x) - 2cx.$$

Vậy $\{x^2, -x^2 + x, x\}$ là một hệ sinh của $\mathrm{Im}\,\varphi$. Dễ thấy $\{x^2, x\}$ là một cơ sở của $\mathrm{Im}\,\varphi$, do đó $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = 2$.

(b) Xét đa thức $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, suy ra $\varphi(p(x)) = 0$ hay

$$q(x) = [2(1-\lambda)a - b]x^2 + [-2\lambda a + (1-\lambda)b - 2c]x - \lambda b = 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$\begin{cases} 2(1-\lambda)a - b = 0 \\ (1-\lambda)b - 2\lambda a - 2c = 0 \\ \lambda b = 0. \end{cases}$$

Vì φ là tự đồng cấu của không gian véctơ hữu hạn chiều nên nó đẳng cấu khi và chỉ khi nó là đơn cấu, nghĩa là $\operatorname{Ker}\varphi = 0$. Điều đó có nghĩa là hệ phương trình trên chỉ có nghiệm tầm thường $a = b = c = 0$, hay định thức của ma trận hệ số khác 0:

$$\begin{vmatrix} 2(1-\lambda) & -1 & 0 \\ -2\lambda & 1-\lambda & -2 \\ 0 & \lambda & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -4\lambda^2 + 4\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0, 1.$$

Bài 4.4 (ĐH Trà Vinh).

(a) Ký hiệu W là tập đang xét. Rõ ràng $0 \in W$ nên $W \neq \emptyset$. Với $f, g \in W$ ta có

$$(f+g)' + 4(f+g) = (f' + 4f) + (g' + 4g) = 0$$
$$(\alpha f)' + 4(\alpha f) = \alpha(f' + 4f) = 0.$$

Do đó $f + g, \alpha f \in W$. Vậy W là một không gian véctơ con của W.

(b) Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $f' + 4f = 0$ là

$$f(x) = ce^{-4x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Do đó $\{e^{-4x}\}$ là một cơ sở của W và $\dim W = 1$.

5 GIÁ TRỊ RIÊNG

Bài 5.1 (ĐH Tân Trào). Dễ thấy, X có các giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Với $\lambda_1 = 1$, có 1 véctơ riêng là $\alpha_1 = (1; -5; 11)$. Với $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, có một véc tơ riêng, $\alpha_2 = (0; 0; 1)$. Do đó, X không chéo hóa được.
Vận dụng tính chéo hóa của một ma trận, ta chọn Y và D có dạng

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ -5 & 0 & y \\ 11 & 1 & z \end{bmatrix}$$

Theo giả thiết, ta có $XY = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ -5 & 0 & 5x+2y \\ 11 & 1 & 4x+3y+2z \end{bmatrix}, YD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & xc \\ -5 & 0 & yc \\ 11 & 1 & zc \end{bmatrix}$.
Suy ra

$$\begin{cases} x + + = xc \\ 5x + 2y + = yc \\ 4x + 3y + 2z = zc \end{cases} \to \begin{cases} c = 1 \\ x = 1 \\ y = 5 \\ z = 11 \end{cases} \to D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -5 \\ 11 & 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

Thử lại $XY = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -5 \\ 11 & 2 & 11 \end{bmatrix} = YD.$

Bài 5.2 (ĐH Vinh). a) Ta có

$$detA = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & -9 \\ 1 & 4-\lambda & -3 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(4-\lambda).$$

Vậy ma trận A có hai giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 4$.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$, gọi $X = (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$ là vectơ riêng tương ứng. Khi đó, $AX = 2X$. Điều này trở thành:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0. \end{cases}$$

  Hệ tương đương với $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$. Từ đó suy ra tất cả các vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ là $(-2\alpha + 3\beta, \alpha, \beta)$ với mọi $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

- Ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 4$, gọi $X = (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$ là vectơ riêng tương ứng. Khi đó, $AX = 4X$. Điều này trở thành:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 0, \\ x_1 - 3x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 0. \end{cases}$$

  Giải hệ này ta thu được tất cả các vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 4$ là $(3\alpha, \alpha, \alpha)$ với mọi $\alpha \neq 0$.

b) Với giá trị riêng $\lambda = 2$, chọn 02 vector riêng độc lập tuyến tính $v_1 = (-2,1,0)$ và $v_2 = (3,0,1)$. Với giá trị riêng $\lambda = 4$, chọn vector riêng $v_3 = (3,1,1)$. Ma trận A chéo hóa được $A = P.B.P^{-1}$, trong đó

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \; P = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \; P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 3/2 \\ -1/2 & -1 & 5/2 \\ 1/2 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$A^n = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 3/2 \\ -1/2 & -1 & 5/2 \\ 1/2 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6.4^{n-1} - 2^{n-1} & 3(4^n - 2^n) & 9(2^{n-1} - 2.4^{n-1}) \\ 2.4^{n-1} - 2^{n-1} & 4^n & 3(2^{n-1} - 2.4^{n-1}) \\ 2.4^{n-1} - 2^{n-1} & 4^n - 2^n & 5.2^{n-1} - 6.4^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Thay $n = 2024$ ta thu được

$$A^{2024} = \begin{pmatrix} 6.4^{2023} - 2^{2023} & 3(4^{2024} - 2^{2024}) & 9(2^{2023} - 2.4^{2023}) \\ 2.4^{2023} - 2^{2023} & 4^{2024} & 3(2^{2023} - 2.4^{2023}) \\ 2.4^{2023} - 2^{2023} & 4^{2024} - 2^{2024} & 5.2^{2023} - 6.4^{2023} \end{pmatrix}.$$

c) Sử dụng công thức khai triển Taylor: $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$ và

$$A^k = \begin{pmatrix} \frac{3.4^k - 2^k}{2} & 3(4^k - 2^k) & \frac{9(2^k - 4^k)}{2} \\ \frac{4^k - 2^k}{2} & 4^k & \frac{3(2^k - 4^k)}{2} \\ \frac{4^k - 2^k}{2} & 4^k - 2^k & \frac{5.2^k - 3.4^k}{2} \end{pmatrix},$$

ta suy ra

$$e^A = \begin{pmatrix} \frac{3.e^4 - e^2}{2} & 3(e^4 - e^2) & \frac{9(e^2 - e^4)}{2} \\ \frac{e^4 - e^2}{2} & e^4 & \frac{3(e^2 - e^4)}{2} \\ \frac{e^4 - e^2}{2} & e^4 - e^2 & \frac{5.e^2 - 3.e^4}{2} \end{pmatrix}.$$

Bài 5.3 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.** (a) Ta kiểm tra 2 tính chất của φ là:

$$\varphi(p(x) + q(x)) = \varphi(p(x)) + \varphi(q(x))$$
$$\varphi(kp(x)) = k\varphi(p(x))$$

trong đó $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ và $k \in \mathbb{R}$. Ma trận của φ đối với cơ sở $\{1, x, x^2\}$ là

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) Đa thức đặc trưng của $A : P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)$. Các trị riêng của A là $0, -1, 2$ đều là các trị riêng đơn (bội 1) nên A chéo hóa được.

- Các véc tơ riêng của A tương ứng với $\lambda_1 = 0$ là $[4a\ 3a\ -4a]^T$ với $a \neq 0$.
- Các véc tơ riêng của A tương ứng với $\lambda_2 = -1$ là $[a\ a\ -2a]^T$ với $a \neq 0$.
- Các véc tơ riêng của A tương ứng với $\lambda_3 = 2$ là $[2a\ a\ -a]^T$ với $a \neq 0$

Ma trận $T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ và $T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ và $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) Với $p(x) = -1 - 2x + 3x^2$ và tọa độ của $p(x)$ đối với cơ sở $B = \{1, x, x^2\}$ là $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Khi đó

$$[\varphi^{2024}(p(x))]_B = A^{2024} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 6.2^{2024} \\ 1 + 3.2^{2024} \\ -2 - 3.2^{2024} \end{bmatrix}$$

Như vậy $\varphi^{2024}(p(x)) = (1 + 6.2^{2024}) + (1 + 3.2^{2024})x + (-2 - 3.2^{2024})x^2$.

Bài 5.4 (ĐH Ngoại Thương)**.** Các giá trị riêng của A là $1; -2; 4$, tìm được qua đa thức đặc trưng. Gọi ba véctơ riêng ứng với ba giá trị riêng $1; -2; 4$ là a, b, c. Ta có

$$\begin{aligned} Ba &= (20.1^5 - 2.1^2 + 4)a = 22a, \\ Bb &= (20.(-2)^5 - 2.(-2)^2 + 4)b = -644b, \\ Bc &= (20.4^5 - 2.4^2 + 4)c = 20452c. \end{aligned}$$

Do đó các giá trị riêng của B là $22, -644, 20452$.

Bài 5.5 (ĐH Trà Vinh)**.** Đa thức đặc trưng của A là $x(x+1)(x-2)$ có ba nghiệm phân biệt nên A chéo hóa được. Các giá trị riêng là $0, -1, 2$ và các véctơ riêng tương ứng là $(4, 3, -4)^T$, $(1, 1, -2)^T$, $(2, 1, -1)^T$. Do đó

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$A^{2024} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{2024} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1+2^{2026} & -4-2^{2027} & -2-2^{2025} \\ 1+2^{2025} & -4-2^{2026} & -2-2^{2024} \\ -2-2^{2025} & 8+2^{2026} & 4+2^{2024} \end{pmatrix}.$$

6 ĐA THỨC

Bài 6.1 (ĐH Giao thông Vận tải)**.** Ký hiệu U là không gian tuyến tính bao gồm tất cả các đa thức có hệ số thực và có bậc không vượt quá 2024. Ký hiệu V là không gian tuyến tính bao gồm tất cả các đa thức có hệ số thực và có bậc không vượt quá 2022. Với mỗi đa thức $Q(x)$ với hệ số thực, ta đặt

$$\Phi[Q(x)] = Q(x+1) + Q(x-1) - 2Q(x) + 7Q''(x).$$

Nếu $Q(x) = ax + b$ là đa thức có bậc không vượt quá 1 thì tính toán trực tiếp ta thu được $\Phi[Q(x)] = 0$. Nếu $Q(x)$ là một đa thức bậc n nào đấy với $n \geqslant 2$ và có số hạng dẫn là $a_n x^n$ thì $\Phi[Q(x)]$ là một đa thức có số hạng dẫn là $8n(n-1)a_n x^{n-2}$ nên $\Phi[Q(x)] \neq 0$ và có bậc là $n-2$. Từ đây ta suy ra rằng, tương ứng $Q(x) \mapsto \Phi[Q(x)]$ xác định một ánh xạ $\Phi : U \to V$ từ không gian tuyến tính U đến không gian tuyến tính V. Dễ dàng chỉ ra được Φ là một ánh xạ tuyến tính và theo phân tích trên

$$\operatorname{Ker}\Phi = \{ax + b \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ta nhận được $\dim(\operatorname{Ker}\Phi) = 2$. Sử dụng $\dim(Im\Phi) = \dim U - \dim(\operatorname{Ker}\Phi) = 2025 - 2 = 2023 = \dim V$ ta suy ra được $Im\Phi = V$ và Φ là một toàn cấu. Vậy với đa thức $P(x)$ cho trước có bậc 2022 là phần tử của V, luôn tồn tại đa thức $Q_0(x)$ có bậc 2024 (là phần tử của U) sao cho $\Phi[Q_0(x)] = P(x)$. Nếu $Q(x)$ là một đa thức nào đấy mà $\Phi[Q(x)] = P(x)$ thì $Q(x)$ cũng phải có bậc là 2024 và $Q(x) \in U$. Khi đó, $\Phi[Q - Q_0] = P - P = 0$ nên $Q - Q_0 \in \operatorname{Ker}\Phi$. Như vậy, tập hợp các đa thức Q(x) thỏa mãn yêu cầu $\Phi[Q(x)] = P(x)$ là các đa thức có dạng

$$Q(x) = Q_0(x) + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Đa thức hệ số thực $Q(x)$ nhận số phức $x = 2 + \sqrt{7}\,i$ là một nghiệm thì nó cũng nhận $x = 2 - \sqrt{7}\,i$ là một nghiệm. Điều này tương đương với $Q(x)$ phải chia hết cho đa thức bậc 2

$$T(x) = (x - 2 - \sqrt{7}\,i)(x - 2 + \sqrt{7}\,i) = x^2 - 4x + 11.$$

Dễ dàng chỉ ra được trong tập hợp (1) ở trên chỉ có duy nhất một cặp hệ số thực a, b để $Q(x)$ là bội của đa thức bậc hai $T(x) = x^2 - 4x + 11$. Như vây, ta đã chỉ ra được điều phải chứng minh.

Bài 6.2 (ĐH Vinh). Ta có

$$P(x).P(2024x^4) = P(x^{2024} + 8x^4) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

- Đầu tiên, ta xét trường hợp $P(x)$ là đa thức hằng. Thay $P(x) = c$ ta suy ra $c = 0$ hoặc $c = 1$.
- Tiếp theo, ta xét trường hợp $deg(P(x)) \geq 1$. Thay $x = 0$, ta suy ra rằng $P^2(0) = P(0)$. Điều này dẫn tới $P(0) = 0$ hoặc $P(0) = 1$.

Nếu $P(0) = 0$ thì $P(x) = x^s Q(x)$ với $s \geq 1$ và $Q(0) \neq 0$. Thay vào (1) ta có

$$x^s Q(x) 2024^s x^{4s} Q(2024x^4) = (x^{2024} + 8x^4)^s Q(x^{2024} + 8x^4) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Điều này tương đương với

$$x^s Q(x) 2024^s Q(2024x^4) = (x^{2020} + 8)^s Q(x^{2024} + 8x^4) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Thay $x = 0$ ta có $Q(0) = 0$: mâu thuẫn với $Q(0) \neq 0$.
Vậy

$$P(0) = 1. \tag{2}$$

Đạo hàm 2 vế (1) ta được

$$P'(x).P(2024x^4) + P(x).8096x^3.P'(2024x^4) = (2024x^{2023} + 32x^3).P'(x^{2024} + 8x^4). \tag{3}$$

Thay $x = 0$ vào đẳng thức trên ta có $P'(0).P(0) = 0$. Suy ra $P'(0) = 0$ (do (2)). Do đó $P'(x) = x^r.H(x)$ với $r \geq 1$ và $H(0) \neq 0$. Thay vào (3) ta có

$$\begin{aligned} x^r.H(x)P(2024x^4) &+ P(x).8096x^3.2024^r x^{4r}.H(2024x^4) \\ &= (2024x^{2023} + 32x^3).(x^{2024} + 8x^4)^r.H(x^{2024} + 8x^4) \end{aligned}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều này tương đương với

$$\begin{aligned} H(x)P(2024x^4) &+ P(x).8096x^3.2024^r x^{3r}.H(2024x^4) \\ &= (2024x^{2023} + 32x^3).(x^{2023} + 8x^3)^r.H(x^{2024} + 8x^4) \end{aligned}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay $x = 0$ vào đẳng thức trên ta có $H(0).P(0) = 0$. Điều này mâu thuẫn với $H(0) \neq 0$ và $P(0) = 1$. Do vậy, không tồn tại đa thức $P(x)$ bậc lớn hơn 0 thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Vậy, tất cả đa thức cần tìm là các đa thức hằng $P(x) = 0$ và $P(x) = 1$.

Bài 6.3 (ĐH Vinh). Nếu đa thức $P(x)$ bậc m thì $P^{(k)}(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và với mọi $k \geq m+1$. Suy ra $f(x)$ là tổng hữu hạn các đa thức, do đó $f(x)$ là một đa thức.

Theo công thức khai triển Taylor ta có

$$\begin{aligned} P(x+1) &= P(x) + P'(x) + \frac{P''(x)}{2!} + \ldots \\ P(x-1) &= P(x) - P'(x) + \frac{P''(x)}{2!} - \ldots \end{aligned}$$

Cộng vế theo vế hai đẳng thức trên ta suy ra

$$\frac{1}{2}\left(P(x+1)+P(x-1)\right) = P(x) + \frac{P''(x)}{2!} + \frac{P^{(4)}(x)}{4!} + \ldots = f(x).$$

Vì $P(x)$ không có nghiệm thực nên nó giữ nguyên dấu trên $\mathbb{R}$. Điều này dẫn tới $P(x+1)$ và $P(x-1)$ cùng dương hoặc cùng âm với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó, $f(x) > 0$ luôn dương, hoặc luôn âm trên $\mathbb{R}$.
Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

Bài 6.4 (ĐH Công nghệ Thông tin)**.**

1. Đa thức đặc trưng của A là $p_A(\lambda) = -(\lambda-2)^3$. Vì $p_A(A) = 0$ và $p(x)$ là đa thức có bậc nhỏ nhất thỏa mãn $p(A) = 0$ nên $p(x)$ là ước của đa thức đặc trưng. Suy ra $p(x)$ có dạng $x-2, (x-2)^2$ hoặc $(x-2)^3$.

   Lần lượt thay A vào các đa thức, ta hấy $A - 2I \neq 0$ và $(A-2I)^2 = 0$. Vậy $p(x) = (x-2)^2$.

2. Thực hiện phép chia có dư, ta được $x^{2024} = (x-2)^2 m(x) + ax + b$.

   Thay $x = 2$, ta được $2^{2024} = 2a + b$.

   Lấy đạo hàm hai vế của $x^{2024} = (x-2)^2 m(x) + ax + b$ và thay 2 vào các đa thức của 2 vế ta được

   $$2024.2^{2023} = a$$

   Suy ra $b = -2023.2^{2024}$. Khi đó $A^{2024} = 2^{2023}(2024A - 4046I)$.

Bài 6.5 (ĐH Trà Vinh)**.**

(a) Ta có

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{5}{4}(1+x^2) - \frac{1}{4}(1+2x+3x^2) - \frac{1}{2}(-x+x^2) \\ x &= \frac{-1}{4}(1+x^2) + \frac{1}{4}(1+2x+3x^2) - \frac{1}{2}(-x+x^2) \\ x^2 &= \frac{-1}{4}(1+x^2) + \frac{1}{4}(1+2x+3x^2) + \frac{1}{2}(-x+x^2). \end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 - x + 2x^2 \\ f(x) &= 2 + 4x + 6x^2 \\ f(x^2) &= 1 + 2x + 3x^2. \end{aligned}$$

Do đó ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $P_2(x)$ là

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Giả sử có $u = a + bx + cx^2$ thỏa mãn $f(u) = v$. Khi đó $f(a + bx + cx^2) = 1 + mx - 5x^2$, hay

$$a(3 - x + 2x^2) + b(2 + 4x + 6x^2) + c(1 + 2x + 3x^2) = 1 + mx - 5x^2.$$

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 1 \\ -a + 4b + 2c = m \\ 2a + 6b + 3c = -5. \end{cases}$$

Thế thì v không thuộc $\operatorname{Im} f$ khi và chỉ khi hệ phương trình trên vô nghiệm. Ta có

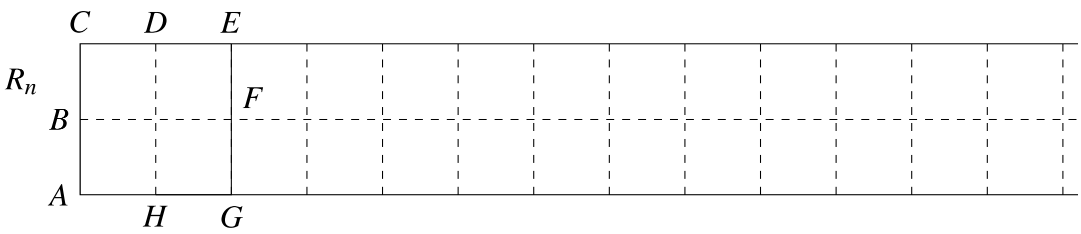
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & m \\ 2 & 6 & 3 & -5 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 14 & 7 & 3m+1 \\ 0 & 0 & 0 & -m-6 \end{array}\right).$$

Do đó hệ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $-m - 6 \neq 0$, tức là $m \neq -6$.

7 TỔ HỢP

Bài 7.1 (Đại học Giao thông Vận tải)**.** Theo giả thiết, ban đầu các cờ đỏ được cắm từng nhóm 3 cái liên tục và các nhóm được ngăn bởi các cờ xanh. Để thuận tiện ta gọi mỗi nhóm là một khúc và các cờ xanh là điểm tiếp nối của các khúc. Ta thấy rằng lá cờ xanh ở vị trí 1 có thể đổi chỗ cho 2 lá cờ đỏ ở vị trí 2 hoặc 3 trong khúc thứ nhất. Lá cờ xanh ở vị trí 1 chỉ có thể đổi chỗ cho duy nhất một lá cờ đỏ ở giữa trong mỗi khúc mà nó không là điểm tiếp nối. Như vậy ta có tất cả 11 cách đổi chỗ lá cờ xanh ở vị trí số 1. Tương tự lá cờ xanh ở vị trí 41 cũng có 11 cách đổi chỗ. Tiếp theo ta xét các lá cờ xanh còn lại. Mỗi lá cờ xanh như thế là điểm tiếp nối của hai khúc nào đấy và nó có thể đổi chỗ cho 4 cờ đỏ trong 2 khúc này. Trong 8 khúc còn lại mà cờ xanh này không là điểm tiếp nối thì nó chỉ có thể đổi chỗ cho duy nhất lá cờ đỏ ở giữa. Như vậy mỗi lá cờ xanh ở các vị trí 5, 9, ... , 37 có 12 cách đổi chỗ. Tổng số cách đổi chỗ của các lá cờ là $2.11+9.12=130$ cách.

Bài 7.2 (ĐH Tân Trào).



- Dễ dàng thấy rằng $R_1=1, R_2=3$ và $R_3=5, R_4=11$.
- Khi chọn hình chữ nhật có kích thước 2×1 để xếp vào ô đầu tiên $ACDH$, thì phần còn lại có R_{n-1} cách chia.
- Khi chọn hình chữ nhật có kích thước 1×2 để xếp vào ô đầu tiên $BCEF$ hoặc $ABFG$, thì phần còn lại có R_{n-2} cách chia.
- Khi chọn hình chữ nhật có kích thước 2×2 để xếp vào ô đầu tiên $ACEG$, thì phần còn lại cũng sẽ có R_{n-2} cách chia.
- Suy ra, theo nguyên lý cộng, số cách chia thỏa mãn yêu cầu bài ra là (công thức truy hồi) $R_n=R_{n-1}+2R_{n-2}$, trong đó $R_1=1,\ R_2=3$.
- Phương trình đặc trưng $\lambda^2-\lambda-2=0$ có hai nghiệm phân biệt $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$.

Ta tìm x_1, x_2 sao cho
$$R_n = x_1\lambda_1^n + x_2\lambda_2^n. \tag{4}$$
Thay $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$ vào phương trình (1), ta nhận được hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ x_1+4x_2=3 \end{cases} \to\ x_1=\frac{1}{3},\ x_2=\frac{2}{3}.$$

Suy ra, $R_n=\frac{1}{3}\left[(-1)^n+2^{n+1}\right]$, với $0<n\in\mathbb{N}$.

Bài 7.3 (ĐH Vinh).

(a) Ký hiệu 4 chàng trai là A, B, C, D và 4 cô gái tương ứng theo cặp đôi là a, b, c, d.

Chàng trai A có 3 cách chọn phong bì không ghi tên người yêu mình (là b, c, d).

Không mất tính tổng quát, xét A chọn được phong bì ghi tên cô gái b, ta viết cặp Ab. Khi đó,

- Nếu B chọn phong bì ghi tên a để được cặp Ba thì 02 cặp còn lại sẽ là Cd và Dc.
- Nếu B chọn phong bì ghi tên c để được cặp Bc thì 02 cặp còn lại sẽ là Cd và Da.
- Nếu B chọn phong bì ghi tên d để được cặp Bd thì 02 cặp còn lại sẽ là Ca và Dc.

Vậy, số kết quả có thể xảy ra để không có chàng trai nào chọn đúng phong bì ghi tên người yêu của mình là $3 \times 3 = 9$.

(b) Ta xét bài toán tổng quát cho n cặp đôi và gọi D_n là số kết quả có thể xảy ra để không có chàng trai nào chọn đúng phong bì ghi tên người yêu của mình. Dễ thấy $D_1 = 0$ và $D_2 = 1$.

Giả sử chàng trai thứ i chọn được phong bì thứ a_i ($1 \le a_i \le n$, $i = \overline{1, n}$, $a_i \ne i$). Ta sẽ lập công thức truy hồi của D_n:

- a_n có $n - 1$ cách chọn từ $\{1, 2, ..., n-1\}$.
- Giả sử $a_n = k$ ($1 \le k \le n-1$):

  TH1: $a_k = n$.
  Khi đó $(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_{n-1})$ chọn từ tập $\{1, 2, ..., k-1, k+1, ..., n-1\}$. Suy ra số kết quả có thể xảy ra trong trường hợp này là D_{n-2}.

  TH2: $a_k \ne n$.
  Khi đó $(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, ..., a_{n-1})$ lấy từ $\{1.2, ..., n-1\}$. Suy ra số kết quả có thể xảy ra trong trường hợp này là D_{n-1}.

Vì vậy ta có công thức:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}).$$

Ta xác định D_{10} theo cách truy hồi:

$$\begin{aligned}
D_1 &= 0, D_2 = 1, D_3 = 2(D_1 + D_2) = 2;\\
D_4 &= 3(D_3 + D_2) = 3(2+1) = 9;\\
D_5 &= 4(D_4 + D_3) = 4(9+2) = 44;\\
D_6 &= 5(D_5 + D_4) = 5(44+9) = 265;\\
D_7 &= 6(D_6 + D_5) = 6(265+44) = 1854;\\
D_8 &= 7(D_7 + D_6) = 14833;\\
D_9 &= 8(D_8 + D_7) = 133496;\\
D_{10} &= 9(D_9 + D_8) = 1334961.
\end{aligned}$$

Vậy đáp số là 1334961.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: GIẢI TÍCH

1 DÃY SỐ

Bài 1.1 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM). Để ý

$$x_n \leq x_{n+1} \leq \Big(1+\frac{1}{2}\Big(1-\cos\frac{\pi}{n}\Big)\Big)x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra

$$x_{n+1} \leq \Big(1+\frac{1}{2}\Big(1-\cos\frac{\pi}{n}\Big)\Big)\Big(1+\frac{1}{2}\Big(1-\cos\frac{\pi}{n-1}\Big)\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{2}\Big(1-\cos\frac{\pi}{1}\Big)\Big)b.$$

Do đó

$$\ln x_{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1+\frac{1}{2}\Big(1-\cos\frac{\pi}{k}\Big)\Big)+\ln b \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\Big(1-\cos\frac{\pi}{k}\Big)+\ln b.$$

Dùng nguyên lý L'Hospital ta được

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Dẫn đến

$$1-\cos\frac{\pi}{n} \leq 2(\frac{\pi}{n})^2.$$

Từ đây suy ra,

$$\ln x_{n+1} \leq \pi^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}+\ln b, \quad \text{hội tụ.}$$

Ta đã chứng minh được x_n tăng và bị chặn trên. Nên x_n hội tụ.

Bài 1.2 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh). (a) Ta có $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$. Do đó

$$u_n=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

Do đó, từ $u_n<\frac{2023}{2024}$, suy ra $(n+1)!<2024$. Do đó, giá trị n lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức này là $n=5$.

(b) Ta có $u_{n+1}-u_n=\dfrac{n+1}{(n+2)!}>0$ hay $u_{n+1}>u_n>0$. Do đó

$$u_{2024}=\sqrt[n]{u_{2024}^n}\leq\sqrt[n]{u_1^n+u_2^n+\cdots+u_{2024}^n}\leq\sqrt[n]{2024u_{2024}^n}=u_{2024}\sqrt[n]{2024}.$$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2024}=1$. Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_1^n+u_2^n+\cdots+u_{2024}^n}=u_{2024}=1-\dfrac{1}{2025!}$.

Bài 1.3 (ĐH Giao thông Vận Tải)**.**

(a) Từ giả thiết, dễ thấy $x_n>0,\forall n\geq 1$. Xét

$$1-x_{n+1}=\frac{2(1-x_n)(1-a_{n+1})}{1+2a_{n+1}x_n},\forall n\geq 1$$

Do $x_1=a_1<1$ nê quy nạp theo n ta được $x_n<1\,\forall n\geq 1$.

Mặt khác, ta lại có:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{(1-x_n)(2a_{n+1}-1+2a_{n+1}x_n)}{1+2a_{n+1}x_n}$$

Do $0<x_n<1$ và $\dfrac{1}{2}<a_n<1,\forall n\geq 1$ nên $x_{n+1}-x_n>0,\forall n\geq 1$.

(b) Từ câu a, ta có:

$$\frac{1-x_{n+1}}{1-x_n}=\frac{2(1-a_{n+1})}{1+2a_{n+1}x_n},n\geq 1.$$

Do dãy x_n tăng thực sự nên $x_n>x_1=a_1>\dfrac{1}{2}$. Ta nhận được

$$\frac{1-x_{n+1}}{1-x_n}<\frac{2(1-a_{n+1})}{1+a_{n+1}},n\geq 1.$$

Xét hàm

$$f(x)=\frac{2(1-x)}{1+x},\ \frac{1}{2}<x<1.$$

Ta có

$$f'(x)=\frac{-4}{(x+1)^2}<0,\ \frac{1}{2}<x<1$$

Suy ra

$$f(x)<f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3},\ \frac{1}{2}<x<1.$$

Áp dụng với $\dfrac{1}{2}<a_{n+1}<1$ ta được

$$\frac{1-x_{n+1}}{1-x_n}<f(a_{n+1})<\frac{2}{3}.$$

Ta có

$$0 < 1 - a_n = \frac{1-a_n}{1-a_{n-1}}.\frac{1-a_{n-1}}{1-a_{n-2}}\cdots\frac{1-a_2}{1-a_1}.(1-a_1) < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.\frac{1}{2} \longrightarrow 0$$

khi $n \to +\infty$. Vậy $\lim x_n = 1$.

Bài 1.4 (ĐH Vinh, N.V. Đức).

(a) Dễ thấy $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có $[x_n] + 1 > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ đây suy ra

$$0 < x_{n+1} = \frac{x_n^2}{3[x_n]+4} < \frac{x_n^2}{3[x_n]+3} = \frac{x_n^2}{3([x_n]+1)} < \frac{x_n^2}{3x_n} = \frac{x_n}{3}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Từ (1) ta có

$$0 < x_8 < \frac{x_7}{3} < \frac{x_6}{3^2} < \ldots < \frac{x_1}{3^7} = \frac{2024}{2187} < 1. \quad (2)$$

(b) Từ (1) ta có

$$0 < x_n < \frac{x_{n-1}}{3} < \ldots < \frac{x_1}{3^{n-1}} = \frac{2024}{3^{n-1}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3)$$

Vì

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2024}{3^{n-1}} = \frac{2024}{3} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

nên theo nguyên lý kẹp ta có dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

2 CHUỖI SỐ

Bài 2.1 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM). Đặt $a_k = \beta \sin^2(k\alpha)$. Để ý

$$b_k := \frac{\beta \sin^2(k\alpha)}{1+\beta \sin^2(k\alpha)} = \frac{a_k}{1+a_k} \geq \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{nếu } a_k \geq 1 \\ a_k \frac{1}{2} & \text{nếu } a_k \leq 1 \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ phân kỳ bằng cách chỉ ra $\sin^2(k\alpha)$ không có giới hạn khi $k \to +\infty$. Từ đó, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ cũng phân kỳ. Với $\gamma \notin \{l\pi : l \in \mathbb{Z}\}$, $\sin\gamma \neq 0$. Đặt $x_n = \sin n\gamma$ và $y_n = \cos n\gamma$. Ta có

$$x_{n+1} = x_n \cos\gamma - y_n \sin\gamma,$$
$$y_{n+1} = x_n \sin\gamma + y_n \cos\gamma.$$

Suy ra

$$y_n = \frac{x_n \cos\gamma - x_{n+1}}{\sin\gamma}, \qquad x_n = \frac{y_{n+1} - y_n \cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

Suy ra $\{x_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi $\{y_n\}$ hội tụ. Giả sử ta có $x_n \to x$ và $y_n \to y$ khi $n \to +\infty$. Ta chứng minh được

$$x^2 + y^2 = 1,\ y = x\frac{\cos\gamma - 1}{\sin\gamma},\ x = y\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

Giải ra $x = y = 0$. Vô lý. Lại để ý,

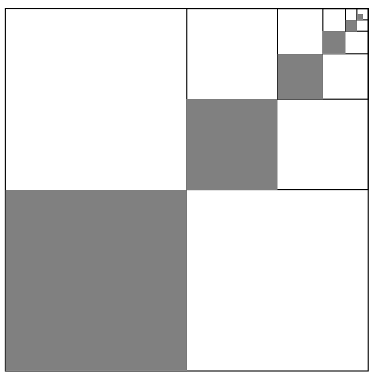
$$\sin^2(k\alpha) = \frac{1-\cos(k(2\alpha))}{2},$$

suy ra $\sin^2(k\alpha)$ không có giới hạn khi $k \to +\infty$. Do đó cũng chứng minh được rằng $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ phân kỳ.

Bài 2.2 (ĐH Khoa học Tự nhiên - ĐHQG HN). Từ hình vẽ ta có thể xét chuỗi số dương

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4^n}.$$

Khi đó tổng của chuỗi chính là tỉ lệ giữa tổng diện tích của các hành vuông màu xám so với diện tích của hình vuông ngoài cùng.



Dùng định nghĩa ta tính được tổng của chuỗi trên là $1/3$.

3 HÀM SỐ

Bài 3.1 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM)**.** Cho $y \in (0,\infty)$, đặt $\alpha = \ln y$. Ta chứng minh được rằng nếu $y \to 1$ thì $\alpha \to 0$. Khi y khá gần 1 thì

$$\frac{f(y)-f(1)}{y-1} = \frac{\sin^2\alpha}{e^\alpha - 1}(f(e)-f(1).$$

Dùng quy tắc L'Hospital ta suy ra $\dfrac{\sin^2\alpha}{e^\alpha-1} \to 0$, khi $\alpha \to 0$. Do đó $f'(1) = 0$.

Bài 3.2 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.**

(a) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta đặt

$$f_n(x) := 2x - \sqrt{x+n} - \sqrt{x+n+1}.$$

Khi đó f_n là hàm khả vi liên tục trên $(0,\infty)$. Hơn nữa, $f_n'(x) > 0$ với mọi $x > 0$ và $n \in \mathbb{N}$. Do đó f_n tăng nghiêm ngặt trên $(0,\infty)$. Mặt khác, ta có

$$f_n(\sqrt{n}) < 0 \text{ và } f_n(\sqrt{n+1}) > 0.$$

Do đó, tồn tại $x_n \in (\sqrt{n}, \sqrt{n+1})$ sao cho $f(x_n) = 0$. Vì f_n là hàm tăng nghiêm ngặt trên $(0,\infty)$ nên x_n là duy nhất với mỗi $n \in \mathbb{N}$.

(b) Xét bất đẳng thức thu được ở trên như sau:

$$\sqrt{n} < x_n < \sqrt{n+1}.$$

Điều này suy ra rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{n}} = 1.$

Để tính $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - \sqrt{n})$ ta có đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}
2(x_n - \sqrt{n}) &= (\sqrt{x_n+n} - \sqrt{n}) + (\sqrt{x_n+n+1} - \sqrt{n}) \\
&= \frac{\frac{x_n}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{x_n}{n}+1}+1} + \frac{\frac{x_n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{x_n}{n}+1+\frac{1}{n}}+1} \\
&\to 1 \text{ khi } n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - \sqrt{n}) = \dfrac{1}{2}.$

Bài 3.3 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.** Ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}{x}=0.$$

Suy ra f khả vi tại 0 và $f'(0)=0$.
Với $x\neq \dfrac{2}{2n+1}, n\in\mathbb{Z}$ thì $f'(x)$ tồn tại. Với $x_n=\dfrac{2}{2n+1}, n=0,2,4,\ldots$, ta có

$$f'_+(x_n)=\lim_{x\to x_n^+}\frac{x^2\cos\frac{\pi}{x}}{x-x_n}=\left(x^2\cos\frac{\pi}{x}\right)'\Big|_{x=x_n}=\pi,$$
$$f'_-(x_n)=\lim_{x\to x_n^-}-\frac{x^2\cos\frac{\pi}{x}}{x-x_n}=\left(-x^2\cos\frac{\pi}{x}\right)'\Big|_{x=x_n}=-\pi,$$

Tương tự, với $x_n=\dfrac{2}{2n+1}, n=1,3,5,\ldots$ thì $f'_+(x_n)=-\pi$ và $f'_-(x_n)=\pi$. Suy ra f không khả vi tại các điểm $x_n, n\in\mathbb{Z}$.

Bài 3.4 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.** Đặt

$$g(x)=f(x)-e^{-x}, x\geq 0,$$

ta có $g(0)=0, g(x)\leq 0$ và $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$. Nếu $g(x)\equiv 0$ thì $f'(x)=-e^{-x}$ với $x\in(0,\infty)$, do đó giả sử tồn tại $a>0$ sao cho $g(a)<0$, khi đó với x đủ lớn, giả sử $x>M$ thì

$$g(x)>\frac{1}{2}g(a),$$

từ đó suy ra g nhận giá trị nhỏ nhất tại $x_0\in(0,M)$, tức là $g'(x_0)=0$.

Bài 3.5. (a) Dễ nhận thấy f liên tục tại các giá trị $x\neq 0$ với mọi a,b. Như vậy, ta chỉ cần tìm a để hàm f liên tục tại $x=0$. Rõ ràng,

$$f \text{ liên tục tại } x=0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0}f(x)=f(0)\Longleftrightarrow \lim_{x\to 0}x^a\sin(x^{-b})=0 \qquad (1)$$

♦ TH1: $a>0$, vì

$$0\leq |x^a\sin(x^{-b})|\leq |x^a|\to 0 \text{ khi } x\to 0$$

nên (1) đúng.

♦ TH2: $a=0$, chọn 2 dãy

$$x_n=\left(\frac{1}{2n\pi}\right)^{1/b}$$

$$x_n' = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right)^{1/b}$$

Hiển nhiên, $x_n \longrightarrow 0$, $x_n' \longrightarrow 0$ khi $n \to \infty$. Nhưng, $\lim f(x_n) = 0 \neq \lim f(x_n') = 1$.

Do vậy, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ không tồn tại.

♦ TH3: $a < 0$, ta cũng chọn dãy x_n' như trên. Khi đó, $\lim f(x_n') = +\infty$. Như vậy, giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (nếu tồn tại), cũng sẽ không thể bằng $f(0)$.

Vậy, hàm f liên tục trên $[-1,1]$ khi và chỉ khi $a > 0$.

(b) Xét giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^{a-1}\sin(x^{-b}).$$

Tương tự câu a, ta thấy giới hạn này tồn tại hữu hạn khi và chỉ khi $a-1>0$. Khi đó, giới hạn này bằng 0, tức là $f'(0)=0$. Vậy $f'(0)$ tồn tại khi và chỉ khi $a>1$.

(c) Ta lưu ý kết quả của câu b, đó là với $a>1$, có $f'(0)=0$. Cũng với $a>1$,

$$f'(x) = ax^{a-1}\sin(x^{-b}) - bx^{a-b-1}\cos(x^{-b}),\, x \neq 0.$$

Xét giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left[ax^{a-2}\sin(x^{-b}) - bx^{a-b-2}\cos(x^{-b})\right] \qquad (2)$$

♦ TH1: $a > b+2$, vì

$$0 \le |ax^{a-2}\sin(x^{-b}) - bx^{a-b-2}\cos(x^{-b})| \le a|x^{a-2}| + b|x^{a-b-2}| \to 0 \text{ khi } x \to 0$$

nên giới hạn ở (2) bằng 0, tức là $f''(0)=0$.

♦ TH2: $a = b+2$. Đặt $k(x) = ax^{a-2}\sin(x^{-b}) - bx^{a-b-2}\cos(x^{-b})$. Ta cũng chọn 2 dãy x_n và x_n' như câu a, ta được

$$\lim k(x_n) = -b \neq \lim k(x_n') = 0.$$

Do đó, giới hạn ở (2) không tồn tại.

♦ TH3: $1 < a < b+2$. Giới hạn ở 2 cũng không tồn tại hữu hạn vì $\lim k(x_n) = -\infty$.

Vậy đạo hàm $f''(0)$ tồn tại khi và chỉ khi $a > b+2$.

Bài 3.6 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Gọi khoảng cách từ chân thang đến chân cột đỡ $BD = x$ (m). Ta có $BH = \sqrt{9+x^2}$. Theo định lí Ta - lét,

$$\frac{BH}{AB} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow AB = \frac{BH \cdot BC}{BD} = \frac{x+0{,}4}{x} \cdot \sqrt{9+x^2}.$$

Bài toán trở thành tìm $x > 0$ để

$$f(x) = AB = \frac{x+0{,}4}{x} \cdot \sqrt{9+x^2}$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

$$f'(x) = -\frac{0,4\sqrt{9+x^2}}{x^2} + \frac{x+0{,}4}{\sqrt{9+x^2}}.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}4\left(9+x^2\right) = x^2(x+0{,}4) \Leftrightarrow x^3 = 3{,}6 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3{,}6}$. Ta có bảng biến thiên

x	0			$\sqrt[3]{3{,}6}$			$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$f\left(\sqrt[3]{3{,}6}\right)$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy chiều dài nhỏ nhất của cái thang thỏa mãn yêu cầu là

$$AB_{\min} = f\left(\sqrt[3]{3{,}6}\right) \approx 5{,}9m.$$

Bài 3.7 (ĐH Khoa học Tự nhiên - ĐHQG HN)**.** Ta cần xác định a và b sao cho tồn tại hàm $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi mà

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{nếu } x \leq 0, \\ be^x + x & \text{nếu } x > 0, \end{cases}$$

trên toàn $\mathbb{R}$. Không khó để thấy hàm f có nhiều nhất một điểm gián đoạn tại $x = 0$. Để ý rằng các giới hạn trái và phải của hàm f tại 0 là tồn tại. Theo Định lý Darboux về giá trị trung gian của đạo hàm thì $x = 0$ không thể là điểm gián đoạn có bước nhảy. (Thực tế $x = 0$ cũng không thể là điểm kỳ dị khử được và từ đây ta thu được thêm thông tin về tính gián đoạn của hàm đạo hàm.) Vậy ta phải có

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x).$$

Và do đó $a = b$.

Bài 3.8 (ĐH Vinh, N.V. Đức). Nếu $f(x) = f(y)$ thì $f_{2024}(x) = f_{2024}(y)$ hay $x = y$. Do đó f đơn ánh. Kết hợp với giả thiết f liên tục trên $\mathbb{R}$ ta suy ra f đơn điệu ngặt trên $\mathbb{R}$. Ta xét hai trường hợp sau:
Trường hợp 1. f đơn điệu tăng ngặt trên $\mathbb{R}$. Nếu $f(x) > x$ thì $x < f(x) < f_2(x) < \ldots < f_{2024}(x) = x$. Nếu $f(x) < x$ thì $x > f(x) > f_2(x) > \ldots > f_{2024}(x) = x$. Vậy ta phải có $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Điều này kéo theo $f_2(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Trường hợp 2. f đơn điệu giảm ngặt trên $\mathbb{R}$. Nếu $f_2(x) > x$ thì $f_3(x) < f(x)$, $f_4(x) > f_2(x)$,... Như vậy ta có

$$x < f_2(x) < f_4(x) < \ldots < f_{2024}(x) = x.$$

Nếu $f_2(x) < x$ thì $f_3(x) > f(x)$, $f_4(x) < f_2(x)$,... Như vậy ta có

$$x > f_2(x) > f_4(x) > \ldots > f_{2024}(x) = x.$$

Vậy ta phải có $f_2(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.9 (ĐH Vinh, N.V. Đức).

(a) Ta có

$$\ln f(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{2023^x + 2024^x}{2},\ \forall x > 0.$$

Vì

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\frac{2023^x + 2024^x}{2} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

nên áp dụng quy tắc L'Hospital ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \ln f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\dfrac{2023^x + 2024^x}{2}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\ln\dfrac{2023^x + 2024^x}{2}\right)'}{1} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}\left(2023^x\ln 2023 + 2024^x\ln 2024\right)}{\dfrac{2023^x + 2024^x}{2}} \\
&= \frac{\ln 2023 + \ln 2024}{2} = \frac{\ln 2023.2024}{2}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln f(x)} = e^{\frac{\ln 2023.2024}{2}} = \sqrt{2023.2024}.$$

(b) Xét hàm

$$g(x) = \ln f(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{2023^x + 2024^x}{2},\ \forall x > 0.$$

Ta có nhận xét f là hàm số đơn điệu tăng trên $(0,+\infty)$ khi và chỉ khi g là hàm số đơn điệu tăng trên $(0,+\infty)$.

Ta có

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{x}\ln\frac{2023^x + 2024^x}{2} \\
&= \frac{1}{x}\ln\frac{2024^x\left(\left(\frac{2023}{2024}\right)^x + 1\right)}{2} = \frac{1}{x}\ln 2024^x + \frac{1}{x}\ln\frac{\left(\frac{2023}{2024}\right)^x + 1}{2} \\
&= \ln 2024 + \frac{1}{x}\ln\frac{\left(\frac{2023}{2024}\right)^x + 1}{2},\ \forall x > 0.
\end{aligned}$$

Đặt $t = \dfrac{2023}{2024} \in (0,1)$. Ta có

$$g(x) = \ln 2024 + \frac{1}{x}\ln\frac{t^x + 1}{2},\ \forall x > 0.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\frac{1}{x^2}\ln\frac{t^x+1}{2} + \frac{1}{x}.\frac{\frac{1}{2}t^x\ln t}{\frac{t^x+1}{2}} \\
&= -\frac{1}{x^2}\ln\frac{t^x+1}{2} + \frac{t^x\ln t}{x(t^x+1)},\ \forall x > 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Ta sẽ chứng minh

$$g'(x) > 0,\ \forall x > 0. \tag{4}$$

Bất đẳng thức (4) tương đương với

$$\begin{aligned}
&\frac{t^x\ln t}{x(t^x+1)} > \frac{1}{x^2}\ln\frac{t^x+1}{2},\ \forall x > 0 \\
\Leftrightarrow &\frac{xt^x\ln t}{t^x+1} > \ln\frac{t^x+1}{2},\ \forall x > 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Xét hàm số

$$Q(x) = \frac{xt^x\ln t}{t^x+1} - \ln\frac{t^x+1}{2},\ \forall x \geqslant 0. \tag{6}$$

Ta có

$$Q'(x) = \frac{xt^x \ln^2 t}{(t^x+1)^2}, \ \forall x \geqslant 0. \tag{7}$$

Ta thấy $Q'(x) > 0, \ \forall x > 0, Q'(0) = 0$. Điều này kéo theo $Q(x) > Q(0) = 0, \ \forall x > 0$. Do đó bất đẳng thức (5) đúng hay bất đẳng thức (4) đúng. Vậy g là hàm số đơn điệu tăng trên $(0, +\infty)$ hay f là hàm số đơn điệu tăng trên $(0, +\infty)$.

4 PHÉP TÍNH VI PHÂN

Bài 4.1 (ĐH Bách khoa - ĐHQG Tp. HCM, P.T. Thực)**.** (a) Lấy $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý. Ta sẽ chứng minh

$$f''(x_0) \geq -\sqrt[3]{\frac{3}{2} f(x_0)}. \qquad (\star)$$

Theo khai triển Taylor thì với mọi $t > 0$ luôn tồn tại ξ_1 và ξ_2 sao cho:

$$f(x_0+t) = f(x_0) + f'(x_0)t + \frac{1}{2} f''(x_0)t^2 + \frac{1}{6} f'''(\xi_1)t^3,$$
$$f(x_0-t) = f(x_0) - f'(x_0)t + \frac{1}{2} f''(x_0)t^2 - \frac{1}{6} f'''(\xi_2)t^3.$$

Vì $f(x_0+t), f(x_0-t)$ không âm và $-1 \leq f''' \leq 1$ nên

$$0 \leq f(x_0+t) + f(x_0-t) \leq 2f(x_0) + f''(x_0)t^2 + \frac{1}{3}t^3.$$

Như vậy ta có

$$2f(x_0) + f''(x_0)t^2 + \frac{1}{3}t^3 \geq 0, \quad \forall t > 0.$$

Từ bất đẳng thức này ta sẽ chọn $t > 0$ một cách hợp lý để đạt được $(\star)$.

- Nếu $f(x_0) = 0$, thì $f''(x_0)t^2 + \frac{1}{3}t^3 \geq 0, \forall t > 0$. Tức là $f''(x_0) \geq -\frac{1}{3}t, \forall t > 0$. Dẫn đến $f''(x_0) \geq 0$. Vậy $(\star)$ đúng.
- Nếu $f(x_0) > 0$, thì chọn $t = \sqrt[3]{12 f(x_0)}$. Khi đó

$$0 \leq 2f(x_0) + f''(x_0)t^2 + \frac{1}{3}t^3 = (12 f(x_0))^{2/3} \left(f''(x_0) + \sqrt[3]{\frac{3}{2} f(x_0)} \right).$$

Ta cũng kết luận được $(\star)$ đúng.

(b) Ta sẽ chứng minh rằng nếu một hàm số f thỏa mãn các điều kiện của ý (a) và

$$f''(x) = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad (\star\star)$$

thì $f'(x) = 0$ với mọi x. Ta sẽ chỉ ra điều này bằng phản chứng.

- Giả sử tồn tại x_0 sao cho $f'(x_0) < 0$. Từ khai triển Taylor và giả thiết $f''' \leq 1$, ta có

$$0 \leq f(x_0 + t) \leq f(x_0) + f'(x_0)t + \frac{1}{2}f''(x_0)t^2 + \frac{1}{6}t^3, \quad \forall t > 0.$$

- Nếu $f(x_0) = 0$, thì $f''(x_0) = 0$ (do giả thiết bài toán). Dẫn đến

$$0 \leq f'(x_0)t + \frac{1}{6}t^3 = t\left(f'(x_0) + \frac{1}{6}t^2\right), \ \forall t > 0.$$

Điều này là vô lý nếu ta chọn t dương đủ gần không (vì $f'(x_0) < 0$).

- Nếu $f(x_0) > 0$, thì ta chọn $t = \sqrt[3]{12f(x_0)}$. Khi đó

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x_0) + f'(x_0)t + \frac{1}{2}f''(x_0)t^2 + \frac{1}{6}t^3 \\ &= f(x_0) + f'(x_0)\sqrt[3]{12f(x_0)} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}f(x_0)}\sqrt[3]{(12f(x_0))^2} + 2f(x_0) \\ &= f'(x_0)\sqrt[3]{12f(x_0)}. \end{aligned}$$

Điều này cũng dẫn tới mâu thuẫn vì $f'(x_0) < 0$.

- Trường hợp tồn tại x_0 sao cho $f'(x_0) > 0$ cũng lập luận hoàn toàn tương tự, bằng cách xét $f(x_0 - t)$, ta cũng đạt được mâu thuẫn.

Như vậy ta vừa chỉ ra được $f'(x) = 0$ với mọi x. Tức là f là hàm hằng. Sử dụng $(\star\star)$ ta kết luận được rằng $f \equiv 0$.

Bài 4.2 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM). Ta sẽ chứng minh $f(x) = 0$ với mọi $x \in [c, 1]$. Giả sử tồn tại $(a, b) \subset [c, 1]$ sao cho $f(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$. Vì $f(c) = 0$ và f liên tục, nên tồn tại $d \in [c, a]$ lớn nhất sao cho $f(d) = 0$. Tiếp theo ta chứng minh được $f(x) > 0$ với mọi $x \in (d, b)$. Từ đó

$$f'(x) \leq Mf(x), \ \forall x \in (d, b).$$

Xét hàm số

$$g(x) = e^{-Mx}f(x),$$

suy ra $g(x) > 0$ với mọi $x \in (d,b)$. Mặt khác

$$g'(x) = -Me^{-Mx}f(x)' + e^{-Mx}f'(x) \leq 0,$$

do đó $g(x)$ nghịch biến trên (d,b), điều này mâu thuẫn vì nó dẫn đến $g(\frac{b+d}{2}) \leq 0$. Ta cũng có một mâu thuẫn nếu $\exists (a,b) \subset [c,1]$ sao cho $f(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$. Tương tự ta sẽ chứng minh được $f(x) = 0$ với mọi $x \in [0,c]$.

Bài 4.3 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh). (a) Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, theo Định lí Lagrange, tồn tại c_1, c_2 sao cho

$$x - 1 < c_1 < x < c_2 < x + 1$$

và thỏa mãn

$$f(x) - f(x-1) = f'(c_1), f(x+1) - f(x) = f'(c_2).$$

Vì f' giảm ngặt trên $\mathbb{R}$ nên $f'(c_2) < f'(x) < f'(c_1)$. Suy ra

$$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1).$$

(b) Vì tồn tại $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ nên

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - f(x-1)) = 0.$$

Do đó, từ $f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$, ta có $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

(c) Chọn g xác định bởi

$$g(x) = \frac{\sin x^2}{x}$$

với $x \neq 0$ và $g(x) = 0$ nếu $x = 0$. Kiểm tra trực tiếp, ta thấy hàm g thỏa mãn điều kiện cần tìm.

Bài 4.4 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên). Xét hàm $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{e - 1}$, suy ra $h'(x) = \dfrac{e^x}{e-1}$. Rõ ràng $h \in V$ và $h' - h(x) = \dfrac{1}{e-1}$ là hằng số. Ta chỉ ra $\alpha = \dfrac{1}{e-1}$ là giá trị duy nhất thỏa mãn bài toán. Thật vậy, với mọi $f \in V$, ta đặt

$$g(x) = f(x)e^{-x} + h(-x)$$

Hiển nhiên, $g(0) = g(1) = 0$. Ta tính được

$$g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} - h'(-x).$$

Giờ, ta áp dụng định lí Rolle cho hàm g trên đoạn $[0,1]$, tồn tại $\xi \in (0,1)$ sao cho

$$g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi)e^{-\xi} - f(\xi)e^{-\xi} - \frac{e^{-\xi}}{e-1} = 0 \Rightarrow f'(\xi) - f(\xi) = \frac{1}{e-1}.$$

Vậy $\alpha = \dfrac{1}{e-1}$.

Bài 4.5 (ĐH Khoa học Tự nhiên - ĐHQG HN)**.** Theo Định lý Lagrange, tồn tại a và b thuộc $(0,3)$ sao cho

$$f'(a) = f(1) - f(0), \quad f'(b) = f(3) - f(2).$$

Như vậy ý nghĩa của bài là mở rộng công thức giá trị trung bình như trong Định lý Lagrange tại nhiều điểm. Theo Định lý Darboux về giá trị trung gian của đạo hàm thì tồn tại c nằm giữa a và b, và do đó thuộc $(0,3)$, sao cho

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(2) + f(1) - f(0)}{2}.$$

Bài 4.6 (ĐH Mỏ - Địa chất, H.N. Huấn)**.** Ký hiệu tổng của chuỗi là $\varphi(x)$. Vì chuỗi hội tụ đều nên ta có thể lấy vi phân nó theo từng hạng tử. Thế nhưng $\varphi'(x) = \varphi(x)$. Điều đó có nghĩa là

$$\varphi(x) = \text{const} \cdot e^x.$$

Bài 4.7 (ĐH Vinh, N.V. Đức)**.** Giả sử $f''(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Vì f'' là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hoặc $f''(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f''(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $f''(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó f' là một hàm đơn điệu tăng ngặt.
Lấy $x_0 \in \mathbb{R}$. Nếu $f'(x_0) > 0$ thì từ Định lý Lagrange và tính tăng ngặt của hàm f' ta có

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > f'(x_0),\ \forall x > x_0$$

hay

$$f(x) > (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0),\ \forall x > x_0. \tag{1}$$

Vì

$$\lim_{x \to +\infty} (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0) = +\infty$$

nên từ (1) ta thấy f là một hàm số không bị chặn. Điều này mâu thuẫn với giả thiết

$$|f(x)| \leqslant 2024,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Nếu $f'(x_0) < 0$ thì từ Định lý Lagrange và tính tăng ngặt của hàm f' ta có

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0),\ \forall x < x_0$$

hay

$$f(x) > (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0),\ \forall x < x_0. \tag{3}$$

Vì

$$\lim_{x \to -\infty} (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0) = +\infty$$

nên từ (3) ta thấy f là một hàm số không bị chặn. Điều này mâu thuẫn với giả thiết (2).
Vậy tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $f''(x) = 0$.

5 PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 5.1 (ĐH Công nghệ Thông tin - ĐHQG Tp. HCM)**.** Để ý

$$\int_a^1 f(t)dt \le (1-a)f(a), \quad af(a) \le \int_0^a f(t)dt.$$

Suy ra

$$a\int_a^1 f(t)dt \le (1-a)\int_0^a f(t)dt.$$

Do đó

$$\int_0^1 f(t)dt \le (1+\alpha)^{-1} \quad \text{với } \alpha = 2024.$$

Đặt

$$h(x) = (\alpha+1)^{-1}x^{\alpha+1} - \int_0^x f(t)dt,\ \forall x \in [0,1].$$

Để ý $h(0) = 0$ và $h(1) > 0$. Mặt khác, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$h(x) < (\alpha+1)^{-1}x^{\alpha+1} - \frac{1}{2}\beta x,\ \forall x \in [0,\varepsilon].$$

Suy ra tồn tại $a \in (0,1)$ sao cho $h(a) < 0$. Theo đó có một $b \in (a,1)$ sao cho $h(b) = 0$. Lại theo định lý giá trị trung bình thì có một $d \in (0,b)$ thỏa $h'(d) = 0$ hay $f(d) = d^{2024}$.

Bài 5.2 (ĐH Đồng Tháp, N.T. Hiếu và V.Đ. Thịnh)**.** (a) Vì $0 \leq f'(x) \leq 1$ với mọi $x \in [0,1]$ nên f là hàm số đồng biến trên $[0,1]$. Do đó $f(x) \geq f(0) = 0$ với mọi $x \in [0,1]$. Ta lại có

$$F'(t) = 2f(t)\int_0^t f(x)dx - (f(t))^3 = f(t)\Big(2\int_0^t f(x)dx - (f(t))^2\Big).$$

Đặt

$$G(t) = 2\int_0^t f(x)dx - (f(t))^2.$$

Ta có

$$G'(t) = 2f(t) - 2f(t)f'(t) = 2f(t)(1-f'(t)) \geq 0$$

với mọi $t \in [0,1]$. Suy ra G hàm số đồng biến trên $[0,1]$. Do đó $G(t) \geq G(0) = 0$. Do đó $F'(t) \geq 0$ với mọi $x \in [0,1]$ hay F đồng biến trên $[0,1]$.

(b) Vì F đồng biến trên $[0,1]$ nên $F(1) \geq F(0)$. Suy ra

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \geq \int_0^1 (f(x))^3 dx.$$

Chọn $f(x) = x$ với $x \in [0,1]$, kiểm tra trực tiếp ta có đẳng thức xảy ra.

Bài 5.3 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên)**.** Ta có

$$f(x) + f(1-x) \geq 2\sqrt{f(x)f(1-x)} = 2$$

Chuyển qua tích phân trên $[0,1]$, ta được

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(1-x)dx \geq 2\int_0^1 dx = 2$$

Bằng phép đổi biến tích phân, dễ thấy

$$\int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

Như vây, ta có

$$2.\int_0^1 f(x)dx \geq 2$$

Từ đó có kết luận.

Bài 5.4 (ĐH Khoa học Tự nhiên - ĐHQG HN)**.** Theo công thức giá trị trung bình cho tích phân ta luôn có

$$\int_0^1 f(t)dt = f(c)$$

với $c \in (0,1)$ nào đó. Ý nghĩa của bài là mở rộng kết quả này cho hai điểm. Do f khả tích trong $[0,1]$ nên hàm F được cho bởi tích phân

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

là xác định trên $[0,1]$. Ngoài ra do f liên tục trong $(0,1)$ nên F khả vi trong $(0,1)$. Theo Định lý Lagrange, tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho

$$F(1) - F(0) = F'(c).$$

Kết hợp các điều trên ta thấy đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$F'(c) = \frac{F'(a) + F'(b)}{2}$$

trong đó a, b là các số thực phân biệt trong $(0,1)$ cần phải xác định. Nếu c là điểm cực trị (toàn cục) của F', không mất tính tổng quát giả sử đây là điểm cực đại, thì

$$F'(x) \leq F'(c) = F(1) - F(0) \quad \text{với mọi } (0,1) \ni x \neq c.$$

Khi đó hàm $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ được cho bởi

$$g(x) = F(x) - F(0) - (F(1) - F(0))x$$

là hàm hằng. Từ đây ta suy ra

$$F'(x) = F(1) - F(0) \quad \text{trên } [0,1]$$

và do đó khẳng định là tầm thường do F' là hàm hằng. Tiếp theo ta xét trường hợp c không là điểm cực trị (toàn cục) của F'. Khi đó tồn tại $p, q \in (0,1)$ sao cho $F'(p) < F'(c) < F'(q)$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $p < q$. Theo Định lý Darboux về giá trị trung gian của đạo hàm ta tìm được $d \in (p,q)$ sao cho

$$F'(d) = F'(c).$$

Lấy $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$F'(p) < F'(d) - \varepsilon < F'(d) < F'(d) + \varepsilon < F'(q).$$

Tiếp tục sử dụng Định lý Darboux ta tìm được $a \in (p,d)$ và $b \in (d,q)$ thỏa mãn yêu cầu.

Bài 5.5 (ĐH Mỏ - Địa chất, H.N. Huấn)**.**

$$\iiiint\limits_{x^2+y^2+z^2+v^2\leq 1} e^{x^2+y^2-z^2-v^2}\,dxdydzdv =$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} e^{x^2+y^2}\left(\iint\limits_{z^2+v^2\leq 1-x^2-y^2} e^{-z^2-v^2}\,dzdv\right)dxdy =$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} e^{x^2+y^2}\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-r^2}\,rdr\right)dxdy =$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} e^{x^2+y^2}\pi\left(1-e^{x^2+y^2-1}\right)dxdy = \pi\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 e^{r^2}\left(1-e^{r^2-1}\right)rdr =$$

$$= \pi^2\left(-1+\frac{e}{2}+\frac{1}{2e}\right) = \pi^2(\cosh 1 - 1).$$

Bài 5.6 (ĐH Vinh, N.V. Đức)**.** Xét hàm số

$$f(x) = \frac{\sin x}{x},\ \forall x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right].$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2},\ \forall x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right].$$

Xét hàm số $h(x) = x\cos x - \sin x,\ \forall x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$. Ta có

$$h'(x) = -x\sin x < 0,\ \forall x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right].$$

Do đó

$$h(x) \leqslant h\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0,\ \forall x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right].$$

Điều này kéo theo

$$f'(x) = \frac{h(x)}{x^2} < 0,\ \forall x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right].$$

Từ đây suy ra

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) < f(x) < f\left(\frac{\pi}{6}\right),\ \forall x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right).$$

Vì $f(x) > 0,\ \forall x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ nên ta có

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 < f(x)^2 < f\left(\frac{\pi}{6}\right)^2,\ \forall x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right).$$

Từ đây ta có bất đẳng thức

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 dx < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)^2 dx < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 dx$$

hay

$$\frac{9}{8\pi} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx < \frac{3}{2\pi}.$$

6 PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 6.1 (ĐH Khoa học Tự nhiên - ĐHQG HN). Trước tiên ta chứng minh f' là hàm hằng. Phản chứng f' không phải là hàm hằng, khi đó tồn tại $a, b \in (0,1)$ sao cho $f'(a) < f'(b)$. Theo Định lý Darboux về giá trị trung gian của đạo hàm thì trên $(0,1)$ hàm f' nhận mọi giá trị trong $\big(f'(a), f'(b)\big)$. Bằng cách xét $f'(x) \in \big(f'(a), f'(b)\big)$ với $x \in (0,1)$ thích hợp ta suy ra đa thức

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

có vô số nghiệm. Đây là điều vô lý. Vậy f' là hàm hằng và do đó $f' \in \{1, 2\}$. Đến đây ta dễ dàng thu được tất cả các hàm f cần tìm. (Phương trình hàm được cho ở bài là một dạng đặc biệt của phương trình vi phân thường. Tuy nhiên kết quả của bài cho chúng ta biết các phương trình vi phân thường nếu chỉ gồm một đạo hàm thì không thú vị. Do đó trong lý thuyết phương trình vi phân, các phương trình hàm nên có sự tham gia của ít nhất là hai đạo hàm với bậc khác nhau. Ở đây ta xem hàm là đạo hàm bậc 0 của chính nó.)