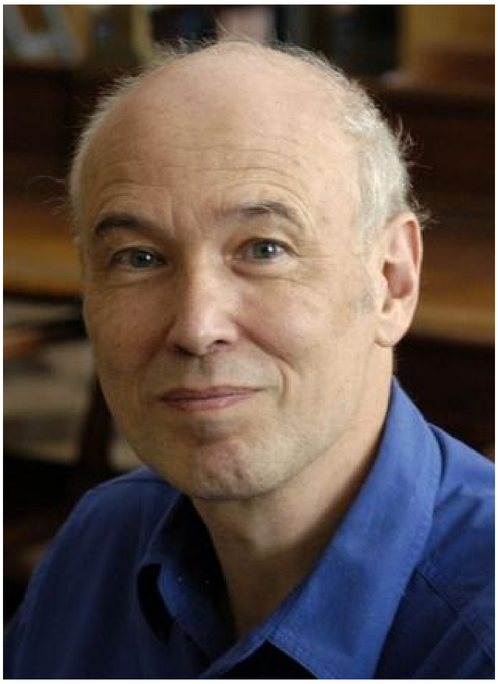
Hội Toán Học Việt Nam

THÔNG TIN TOÁN HỌC

Tháng 3 Năm 2013 Tập 17 Số 1



Thông Tin Toán Học
(Lưu hành nội bộ)

- Địa chỉ liên hệ

*Bản tin: **Thông Tin Toán Học***
Viện Toán Học
18 Hoàng Quốc Việt, 10307 Hà Nội

Email:

`ttth@vms.org.vn`

Trang web:
`http://www.vms.org.vn/ttth/ttth.htm`

- Bản tin **Thông Tin Toán Học** nhằm mục đích phản ánh các sinh hoạt chuyên môn trong cộng đồng toán học Việt Nam và quốc tế. Bản tin ra thường kỳ 4 số trong một năm.

- Thể lệ gửi bài: Bài viết bằng tiếng Việt. Tất cả các bài, thông tin về sinh hoạt toán học ở các khoa (bộ môn) toán, về hướng nghiên cứu hoặc trao đổi về phương pháp nghiên cứu và giảng dạy đều được hoan nghênh. Bản tin cũng nhận đăng các bài giới thiệu tiềm năng khoa học của các cơ sở cũng như các bài giới thiệu các nhà toán học. Bài viết xin gửi về tòa soạn theo email hoặc địa chỉ ở trên. Nếu bài được đánh máy tính, xin gửi kèm theo file với phông chữ unicode.

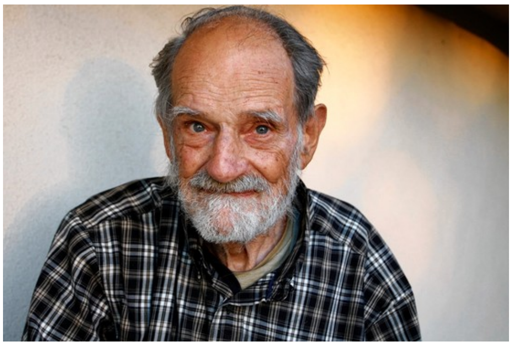
Trang web của Hội Toán học:
`http://www.vms.org.vn`

Ảnh bìa 1. Xem trang 24
Nguồn: Internet

Giải Nobel kinh tế 2012
Ghép đôi ổn định và thiết kế thị trường

Nguyễn Tiến Thành
(Trường Quản trị kinh doanh Kellogg, ĐH Northwestern, Mỹ)

Kinh tế học nghiên cứu sự phân chia nguồn tài nguyên, của cải, nguồn nhân lực, nguồn vốn v.v (trong bài viết này sẽ gọi chung là nguồn lực, “resources” trong tiếng Anh) ở các xã hội và các môi trường kinh tế khác nhau. Trong nhiều trường hợp, hệ thống giá cả giải quyết bài toán phân chia nguồn lực khá thành công, chẳng hạn như quy luật cung cầu trong kinh tế: khi cung không đủ cầu thì giá tăng lên, và ngược lại. Tuy nhiên trong một số hoàn cảnh khác, vì luật pháp không cho phép hoặc vì trái với đạo lý và chuẩn mực xã hội, tiền bạc không thể sử dụng trong bài toán phân chia nguồn lực. Ví dụ như việc phân chia nội tạng cho các bệnh nhân chờ cấy ghép, hay việc xét tuyển để nhận sinh viên vào các trường đại học.



Lloyd Shapley. Nguồn: *Internet*

Giải Nobel kinh tế năm 2012 được trao cho hai nhà kinh tế học người Mỹ là Lloyd Shapley và Alvin Roth vì những cống hiến của họ trong các nghiên cứu về những hệ thống kinh tế mà phương cách sử dụng hệ thống giá cả để điều tiết bị hạn chế. Giáo sư Shapley nhận giải thưởng này vì những đóng góp về mặt lý thuyết còn giáo sư Roth được nhận giải vì đã phát triển và đưa lý thuyết này vào trong thực tiễn.

Năm 1962 L. Shapley cùng với đồng nghiệp David Gale (nhà kinh tế học đã qua đời năm 2008, nếu còn sống chắc ông cũng sẽ cùng được nhận giải thưởng Nobel kinh tế năm 2012) công bố một bài báo vô cùng súc tích nghiên cứu vấn đề “ghép đôi ổn định” (stable matching) trên tạp chí American Mathematical Monthly (xem [1]). Bài báo đưa ra một thuật toán mà hiện nay được gọi là *thuật toán Gale-Shapley* để tìm ra phương cách ghép cặp những cá thể với nhau một cách tối ưu cho cả hai phía, khi mà tất cả họ đều có những đánh giá khác nhau về mức độ phù hợp của các đối tượng có thể được ghép.

Alvin Roth. Nguồn: *Internet*

Trong bài báo, hai tác giả đã chủ đích đưa ra các kết quả và chứng minh trong những ngữ cảnh cụ thể. Chẳng hạn ta hãy xét bài toán tuyển sinh đại học. Giả sử có n ứng viên nộp hồ sơ xin học vào m trường đại học, trong đó trường thứ i có chỉ tiêu là q_i. Một cách tự nhiên, ta có thể giả sử số lượng ứng viên sẽ không ít hơn tổng số chỉ tiêu của m trường ($n \geq \sum_1^m q_i$). Mỗi ứng viên xếp hạng các trường mà mình muốn học theo thứ tự ưu tiên, trừ ra những trường mà họ không muốn vào học dù có được chấp nhận. Để thuận tiện, ta yêu cầu không có tình huống đồng hạng xảy ra, tức là dù ứng cử viên có ưa thích hai trường như nhau thì cũng cần phải xếp chúng theo thứ tự ưu tiên. Mỗi trường khi đó cũng xếp hạng ứng viên tiềm năng sau khi loại ra những ứng viên không đạt yêu cầu dù chỉ tiêu vẫn còn. Để thuận tiện, ta cũng giả thiết rằng ứng viên không đạt yêu cầu của một trường nào đó thì cũng sẽ không được phép nộp đơn vào trường này. Từ dữ kiện về chỉ tiêu và hai bộ sắp thứ tự này, ta muốn xác định một phép gán các ứng viên vào các trường sao cho phù hợp nhất. Ý tưởng mấu chốt ở đây là ta cần kết quả cuối cùng phải ***ổn định***, tức là không tồn tại hai ứng viên α, β nào được nhận vào hai trường A, B tương ứng nhưng β lại thích A hơn B và A cũng thích β hơn α; và cũng không tồn tại hai ứng viên α, β nào sao cho α được nhận vào trường A và β không được trường nào nhận nhưng A lại thích β hơn α.

Thuật toán Gale-Shapley dưới đây *đảm bảo sự tồn tại của một phép gán ổn định*. Hơn nữa, trong số những phép gán ổn định luôn có một phương án ***tối ưu***, tức là một phép gán ổn định trong đó mọi ứng viên đều có kết quả *không tồi hơn* so với kết quả của họ trong các phép gán ổn định khác. *Phép gán tối ưu này là duy nhất*. Thật vậy, nếu có hai phép gán tối ưu thì sẽ có ít nhất một ứng viên có kết quả trong một phép gán tồi hơn so với trong phép gán còn lại, mâu thuẫn với tính tối ưu.

Thuật toán Gale-Shapley: Đầu tiên, tất cả ứng viên đều nộp đơn vào trường mà họ thích nhất. Mỗi trường thứ i với chỉ tiêu q_i sẽ lập một danh sách gồm q_i ứng viên mà họ xếp hạng cao nhất và loại bỏ phần còn lại, hoặc gồm tất cả các ứng viên nếu số lượng ít hơn chỉ tiêu. Ở vòng thứ hai, các ứng viên bị từ chối trong vòng đầu sẽ nộp đơn vào các trường mà họ ưa thích thứ nhì và mỗi trường thứ i với chỉ tiêu q_i sẽ lại lập ra một danh sách mới gồm q_i ứng viên mà họ xếp hạng cao nhất trong số những ứng viên mới và những ứng viên trong danh sách cũ và loại bỏ phần còn lại, hoặc gồm tất cả các ứng viên mới và cũ nếu số lượng vẫn còn ít hơn chỉ tiêu. Và ta cứ tiếp tục các vòng tiếp theo như thế. Vì $n \geq \sum_1^m q_i$ nên qui trình này phải dừng (sau tối đa $n(\sum_1^m q_i)$ vòng) khi mà mỗi ứng viên hoặc là nằm trong một danh sách của một trường, hoặc là bị tất cả các trường mà anh ta muốn học và được phép nộp hồ sơ từ chối. Ở vòng cuối cùng này, tất cả các trường chỉ việc nhận những ứng viên trong danh sách thì ta sẽ có phép gán ổn định. Thật vậy, nếu giả sử ứng viên α vào học trường A nhưng anh ta lại thích trường B hơn, thì theo thuật toán trên, anh ta phải nộp đơn vào trường B trong một vòng nào trước đó. Điều đó chứng tỏ ứng viên α đã bị trường này từ chối, và rõ ràng trường B này đã đánh giá ứng viên α thấp hơn tất cả các ứng viên được nhận của nó. Trường hợp có hai ứng viên α, β sao cho α được nhận vào trường A, và β không được trường nào nhận nhưng A lại thích β hơn α rõ ràng cũng không thể xảy ra trong qui trình trên.

Sự tồn tại phép gán tối ưu: Ta gọi một trường là *"thích hợp"* đối với một ứng viên nếu có một phép gán ổn định sao cho người này được trường đó nhận vào học. Trước hết ta chứng minh qui nạp rằng trong thuật toán không có ứng viên nào bị một trường "thích hợp" của mình loại ra. Giả sử cho đến *trước* một bước nào đó trong thuật toán vẫn không có ứng viên nào bị một trường thích hợp của mình loại ra; và giả sử thêm rằng ở *bước này* một trường A đã nhận đủ chỉ tiêu gồm q_i hồ sơ của q_i ứng viên $\beta_1, ..., \beta_{q_i}$ và loại ra ứng viên α. Ta sẽ chứng tỏ rằng trường A này *không* thể là trường "thích hợp" đối với ứng viên α. Thật vậy, ta biết rằng tất cả các ứng viên $\beta_1, ..., \beta_{q_i}$ đều thích trường A này hơn mọi trường nào khác, trừ ra những trường đã loại họ trước đó, những trường mà theo giả thiết qui nạp, không thể là trường "thích hợp" đối với họ. Xét một phép gán giả định trong đó α sẽ học ở trường A này và các ứng viên khác đều được học ở trường "thích hợp" đối với mình. Khi đó, ít nhất một β_j trong số các ứng viên $\beta_1, ..., \beta_{q_i}$ sẽ phải học ở một trường B ít được ưa thích hơn so với trường A. Do đó phép gán này là không ổn định, vì trong phương án này β_j thích A hơn B và A cũng thích β_j hơn α. Vậy ta đã chứng minh được rằng các bước trong thuật toán chỉ loại ra những ứng viên không thể được gán vào bất cứ phương án ổn định nào. Bây giờ giả sử có một ứng viên α thích trường B trong một phương án ổn định nào đó hơn so với trường A trong phương án ổn định ở bước cuối cùng của thuật toán. Như thế chứng tỏ người này đã nộp đơn vào B và đã bị trường B loại trước đó, mâu thuẫn với điều vừa chứng minh. Vậy kết quả cuối cùng của thuật toán là phương án tối ưu.

Những năm tiếp theo của thập kỷ 60 và 70 của thế kỉ trước, nhiều nghiên cứu khác về ghép đôi ổn định ra đời và tạo ra một mảng khác biệt so với những hướng đi khác của kinh tế học lúc bấy giờ. Nhưng phải đợi đến giữa những năm 1980, người ta mới nhận ra vai trò rất lớn của mảng lý thuyết này trong thực tế qua một bài báo có tính bước ngoặt của Roth [2]. Trong bài báo, Roth nghiên cứu về sự thay đổi và phát triển của thị trường lao động tại các bệnh viện ở Mỹ và đưa ra kết luận rằng thuật toán Gale-Shapley mà lúc đó đã được ứng dụng tại khá nhiều bệnh viện thực sự đã giúp cải tiến vượt bậc thị trường lao động này. Bài báo là một bước phát triển quan trọng cho sự hình thành của một nhánh mới trong kinh tế học, lĩnh vực "thiết kế thị trường." Ở đó người ta nghiên cứu thiết kế những thị trường trong thực tế, nơi có thể áp dụng được thuật toán Gale-Shapley.

Từ những năm 1990 cho đến hiện tại, Roth cùng các đồng nghiệp vẫn phát triển mảng đề tài này trong cả hai khía cạnh lý thuyết và thực tiễn, thậm chí đã áp dụng nó vào những thị trường mà ở đó yếu tố giá cả vẫn được tính đến. Roth đã đạt khá nhiều thành công và có ảnh hưởng thực tế rất lớn. Ông đã giúp cải tiến nhiều phương thức tuyển sinh trong hệ thống các trường học công tại các thành phố New York, Boston, Chicago, v.v. Ông cũng đã phối hợp với các bệnh viện để thiết kế thuật toán phân chia và trao đổi thận giữa bệnh nhân và người hiến nội tạng. Với những cống hiến này, Lloyd Roth là một trong số ít những nhà nghiên cứu đưa khoa học kinh tế tiến gần đến với cuộc sống thực tế, và cùng với David Gale nhận giải Nobel kinh tế năm 2012 một cách xứng đáng.

TÀI LIỆU

[1] Gale, D. and Shapley, L. S. (1962). College admissions and the stability of marriage, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 69: 9–15.

[2] Roth, A. E. (1984). The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory, *J. Polit. Econ.*, Vol. 92: 991-1016.

Cấu trúc toán học trong tác phẩm "*Phòng tranh*" của Escher

B. de Smit *và* **H. W. Lenstra Jr.**

Lời người dịch: *M. C. Escher là một họa sĩ Hà Lan, nổi tiếng qua các tác phẩm in mộc bản, in thạch bản, in khắc nạo lấy cảm hứng từ toán học. Các tác phẩm của Escher thường đặc trưng cho các cấu trúc bất khả thi trong không gian ba chiều nhưng có thể miêu tả được trong mặt phẳng, khảo sát về tính vô tận trong kiến trúc cũng như trong trang trí khảm màu. Cộng đồng toán học quốc tế biết đến Escher rộng rãi qua một triển lãm các tác phẩm của Escher tại Bảo tàng Stedelijk, khi Đại hội Toán học Thế giới diễn ra tại Amsterdam năm 1954.*

Từ năm 1986, Liên hội đồng Chính sách về Toán học Mỹ (Joint Policy Board for Mathematics) chọn tháng Tư hàng năm để tổ chức "Tháng nhận thức về Toán học" (Mathematics Awareness Month). Năm 2003, nhân chủ đề "Toán học và Nghệ thuật" của hoạt động thường niên này, tờ Thông tin của Hội Toán học Mỹ số Tháng 4 đã có loạt ba bài về di sản nghệ thuật của Escher. Bài dưới đây là bản dịch từ bài báo "B. de Smit and H. W. Lenstra Jr., The Mathematical Structure of Escher's Print Gallery. *Notices Amer. Math. Soc.* 50 (4) (2003): 446-451"(1) *trong loạt bài đó.*

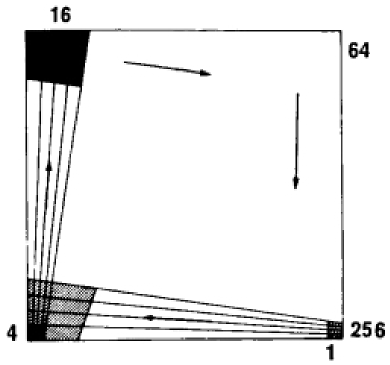
Năm 1956, Maurits Cornelis Escher (1898–1972), một nghệ sĩ tạo hình người Hà Lan, đã sáng tác một tác phẩm in thạch bản khác thường có tên là "*Phòng tranh*" (tiếng Hà Lan: "*Prententententoonstelling*"). Tác phẩm mô tả một người đàn ông đứng trong một phòng triển lãm, đang xem một bức tranh vẽ một thành phố cảng ở Địa Trung Hải. Trong bức tranh, khi người đàn ông này đưa mắt nhìn theo dãy nhà xây dọc theo bờ biển từ trái sang phải và từ trên xuống dưới, anh ta nhận ra rằng những căn nhà đó cũng chính là những bản sao của phòng tranh nơi mà anh ta đang đứng. Ở chính giữa tác phẩm, một đốm tròn màu trắng trên đó có chữ kí của Escher và chữ MCE dạng khối.

Hình 1. Bức "*Phòng tranh*" của Escher, in thạch bản (1956). © MC Escher Co., Hà Lan.

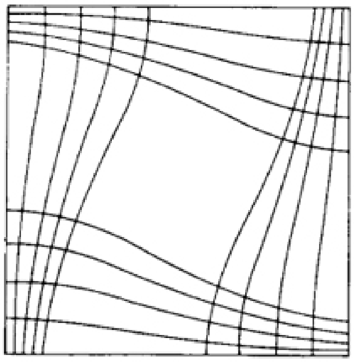
Yếu tố toán học nào ẩn sau tác phẩm "*Phòng tranh*"? Có cách nào thỏa đáng hơn để thay thế đốm trắng nói trên không? Như sẽ thấy, ta có thể xem tác phẩm này đã được vẽ trên một *đường cong elliptic* trên trường số phức, và kết luận rằng một phiên bản lí tưởng của bức tranh là các hình trong tranh được lặp đi lặp lại chính nó theo một vòng xoắn cho tới chính giữa bức tranh. Chính xác hơn, bức tranh chứa các bản sao của chính nó quay theo chiều kim đồng hồ một góc $157,6255960832\ldots$ độ và được thu nhỏ dần với tỉ lệ là $22,5836845286\ldots$.

(1)Bản điện tử có thể lấy tại `http://www.ams.org/notices/200304/fea-escher.pdf`

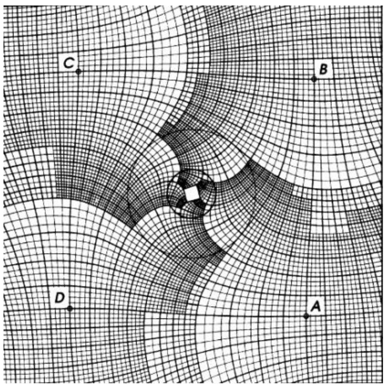
Phương pháp Escher



Hình 2. Dùng các đường thẳng để biểu diễn một mở rộng tuần hoàn.



Hình 3. Dùng các đường cong để biểu diễn một mở rộng tuần hoàn.



Hình 4. Lưới Escher.

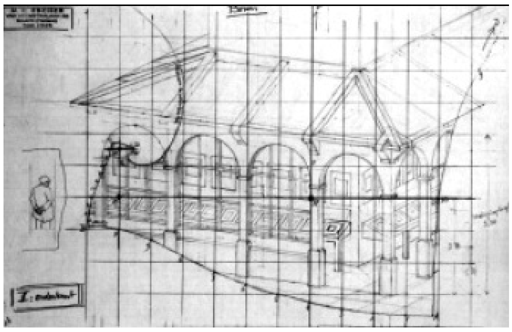
Trong [1], B. Ernst đã đưa ra cách giải thích tốt nhất cho quá trình Escher tạo ra tác phẩm "*Phòng Tranh*". Mọi hình minh họa trong bài và những lời trích dẫn dưới đây đều được lấy ra từ cuốn sách đó. Escher đã bắt đầu "từ ý tưởng rằng phải có cách nào đó để tạo nên một ống cong (annular bulge), mở rộng tuần hoàn, không có khởi đầu và cũng không có kết thúc." "Escher đã hết sức bận tâm" để hiện thực hóa ý tưởng này.

Đầu tiên, Escher đã "cố gắng thực hiện ý tưởng của mình bằng cách dùng các đường thẳng [Hình 2], nhưng sau đó trực giác đã mách bảo ông dùng các đường cong như trong Hình 3. Bằng cách này, các hình vuông nhỏ nguyên thủy vẫn được duy trì tốt hình dạng của nó khi được thể hiện ra trên tranh."

Sau nhiều lần cải tiến liên tiếp, Escher nhận được một lưới như Hình 4. Khi ta di chuyển từ A đến D, các hình vuông trong lưới sẽ được giãn ra đến 4 lần theo mỗi cạnh. Còn khi ta đi vòng theo chiều kim đồng hồ quanh tâm, lưới sẽ chồng lên chính nó nhưng mở rộng ra $4^4 = 256$ lần.

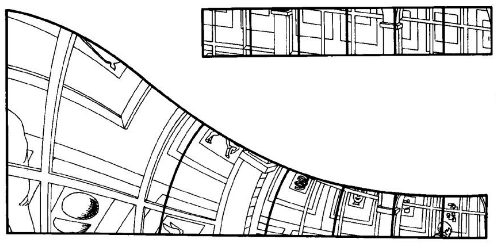
Yếu tố thứ hai mà Escher cần nữa là những hình vẽ ở trạng thái bình thường, không bị méo mó, miêu tả cùng một khung cảnh: một phòng tranh nơi triển lãm đang diễn ra, một bức tranh trong triển lãm mô tả cảnh một thành phố cảng với các tòa nhà được xây dựng dọc theo bãi biển, và một trong những tòa nhà này là phòng tranh ban đầu nhưng được thu nhỏ lại 256 lần. Để thẩm định được số chi tiết thay đổi cần thiết, Escher đã thực hiện đến bốn bức phác họa chi tiết thay vì chỉ một (xem [3]), mỗi một góc của thạch bản được phác họa riêng trên một hình.

Hình 5 cho ta thấy phác họa chi tiết của góc dưới cùng bên phải bức tranh. Mỗi một phác họa này tỉ lệ với phác họa trước đó (theo thứ tự modulo 4) nhưng được phóng to lên 4 lần. Về mặt toán học, ta cũng có thể xem cả bốn phác họa này của Escher chỉ như là một bức vẽ bất biến dưới các phép co giãn theo tỉ lệ 256 lần.



Hình 5. Một phác họa của Escher.

Cuối cùng, trong từng hình vuông, Escher đã điều chỉnh lưới gồm các ô vuông có cạnh thẳng (lưới thẳng) trong bốn hình nghiên cứu trên để chúng vừa khớp với lưới gồm các ô vuông có cạnh cong (lưới cong). Bằng cách này ông tạo ra được tác phẩm "*Phòng tranh*." Quá trình này được minh họa như trong Hình 6.

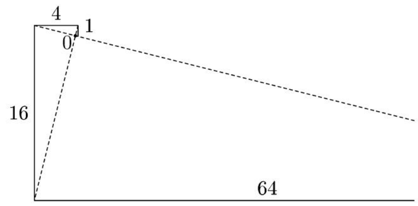


Hình 6. Điều chỉnh các ô vuông trên lưới thẳng cho khớp với lưới cong.

Dưới đây ta sẽ hình dung ra phiên bản không bị méo mó của bức tranh được vẽ trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, với điểm 0 ở chính giữa. Ta coi bức tranh như là một hàm $f : \mathbb{C} \to \{$trắng, đen$\}$ bằng cách gán mỗi điểm $z \in \mathbb{C}$ cho một màu $f(z)$. Khi đó điều kiện bất biến (tức là bức tranh lặp lại chính nó) chính là $f(256z) = f(z)$, với mọi $z \in \mathbb{C}$.

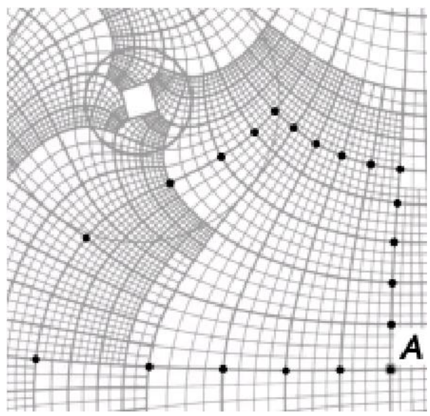
Chu kì nhân tính phức

Phương pháp của Escher đưa ra cách thức rất chính xác để chuyển đổi qua lại giữa lưới thẳng và lưới cong. Ta hãy di chuyển trong lưới cong và tìm lại những bước di chuyển tương ứng trong lưới thẳng. Đầu tiên ta xét một con đường đi dọc theo các đường trong lưới cong từ A đến B, đến C, đến D, rồi quay trở lại A. Trong lưới cong, nó sẽ tương ứng với một vòng khép kín.



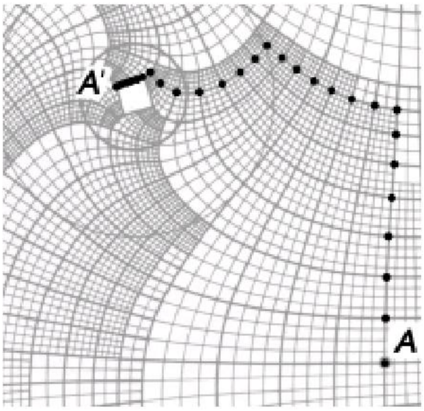
Hình 7. Hình vuông $ABCD$ trên lưới thẳng.

Trong khi đó, đường tương ứng với đường đi vừa xét (như trong Hình 7) trong lưới thẳng sẽ gồm ba lần rẽ trái, mỗi lần sẽ đi tiếp một quãng xa hơn gấp 4 lần so với quãng đường đi được sau lần rẽ trước đó, trước khi rẽ tiếp. Đây không phải là một vòng khép kín; thay vào đó, nếu điểm xuất phát được lựa chọn phù hợp, module của tọa độ điểm kết thúc sẽ gấp 256 lần so với điểm khởi đầu. Với cùng một điểm xuất phát, điều tương tự cũng xảy ra khi mà ta biến đổi một vòng đơn khép kín ngược chiều kim đồng hồ quanh điểm chính giữa từ lưới cong sang lưới thẳng. Điều này phản ánh tính bất biến của hình trên lưới thẳng qua phép giãn với tỉ lệ 256 lần.



H. 8. Một hình vuông cạnh 5×5 trên lưới cong.

Hiện tượng trên sẽ không xảy ra nếu ta không đi vòng quanh điểm chính giữa. Ví dụ, nếu ta xuất phát từ A và đi thẳng lên phía trên 5 đơn vị; quay sang trái và đi tiếp 5 đơn vị; và làm như thế thêm hai lần nữa.



H. 9. Một hình vuông cạnh 7×7 trên lưới cong.

Khi đó sẽ tạo ra một vòng kín trên lưới cong như trong Hình 8, và trong lưới thẳng, nó tương ứng với việc di chuyển dọc theo các cạnh của một hình vuông kích thước 5×5, tức là một vòng khép kín. Nhưng nếu bây giờ ta làm tương tự cho trường hợp 7 đơn vị thay vì 5 đơn vị như trên, thì trên lưới thẳng ta cũng có một vòng kín là hình vuông 7×7, nhưng trên lưới cong ta sẽ không kết thúc ở điểm A mà thay vào đó là một đỉnh A' của hình vuông nhỏ ở giữa như trong Hình 9. Vì hai điểm A và A' rõ ràng tương ứng với cùng một điểm trên lưới thẳng, một cách lí tưởng, mỗi bức tranh được tạo bởi phương pháp Escher sẽ nhận cùng một màu tại A và A'. Ta viết "*một cách lí tưởng*" là vì trong tác phẩm thực của Escher, điểm A' nằm trong vết tròn màu trắng ở chính giữa tranh.

Bây giờ ta cũng đồng nhất mặt phẳng chứa lưới cong của Escher, tức là mặt phẳng chứa tranh in thạch bản của ông với $\mathbb{C}$, điểm gốc 0 được đặt vào chính giữa tranh. Ta xác định γ bởi $\gamma = A/A'$. Một phép đo thô cho thấy rằng $|\gamma| < 20$ và $\arg(\gamma) \leq 3$.

Bằng cách thay điểm A trong quá trình trên bởi bất cứ điểm P nào nằm trên một trong các cạnh AB, BC, CD, DA của lưới, ta sẽ tìm được một điểm P' tương ứng nằm trên biên của một hình vuông nhỏ ở giữa, và một cách lí tưởng, P' và P có cùng màu. Ta thấy rằng với sự sai khác không đáng kể, thương P/P' không phụ thuộc vào P', và do đó cũng sẽ bằng γ. Đây là giả thiết ta cần. Vậy khi ta quay "hình vuông" $ABCD$ theo chiều kim đồng hồ một góc 160^o và thu nhỏ lại tối đa 20 lần thì nó sẽ trùng với hình vuông nhỏ ở chính giữa.

Gọi g là một hàm xác định trên một tập con thích hợp của $\mathbb{C}$ và cũng nhận giá trị trong tập $\{$trắng, đen$\}$ bằng cách gán mỗi điểm w với màu $g(w)$ của nó như trong tác phẩm của Escher. Nếu Escher đã dùng toàn bộ lưới (mà trong thực tế ông đã bỏ qua phần trung tâm) thì như vừa chứng tỏ, ta sẽ có $g(P') = g(\gamma P')$, với mọi P' như trên, và như thế ta có thể mở rộng bức tranh của ông lên toàn bộ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bằng cách cho $g(w) = g(\gamma w)$, với mọi w. Điều này không chỉ lấp đầy vệt tròn màu trắng chính giữa bức tranh mà còn có thể mở rộng nó ra đến vô tận.

Đường cong elliptic

Trong khi bức tranh trên lưới thẳng được lặp đi lặp lại với tỉ lệ 256, một phiên bản hoàn hảo tương ứng của nó trên lưới cong sẽ tuần hoàn với chu kì nhân tính phức γ. Hay nói cách khác, ta có lần lượt

$$f(256z) = f(z), \text{ và } g(\gamma w) = g(w).$$

Mối liên hệ giữa hai số phức 256 và γ là gì? Ta có thể xác định được γ mà không cần phải đo đạc nó trên lưới của Escher hay không? Để trả lời những câu hỏi này, ta bắt đầu bằng việc hệ thống lại những điều đã biết. Để thuận tiện, ta loại bỏ 0 ra khỏi $\mathbb{C}$ và xét các hàm trên $\mathbb{C}^*$ thay vì trên $\mathbb{C}$. Điều này sẽ tạo ra một lỗ trống, nhưng khác với đốm trắng ở trong tác phẩm của Escher, nó quá nhỏ nên ta có thể bỏ qua. Tiếp theo, thay vì xét các hàm tuần hoàn f với chu kì nhân tính 256, ta xét các hàm được cảm sinh $\bar{f} : \mathbb{C}^*/\langle 256\rangle \to \{$trắng, đen$\}$, trong đó $\langle 256\rangle$ kí hiệu cho nhóm con của nhóm nhân $\mathbb{C}^*$ sinh bởi 256. Cũng như thế, thay vì xét hàm g ta xét hàm $\bar{g} : \mathbb{C}^*/\langle\gamma\rangle \to \{$trắng, đen$\}$. Phương pháp của Escher cho ta cách chuyển đổi qua lại giữa các hàm f và g. Tức là ta có một song ánh $h : \mathbb{C}^*/\langle\gamma\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^*/\langle 256\rangle$ sao cho g được cảm sinh từ f bởi phép hợp thành $\bar{g} = \bar{f} \circ h$.

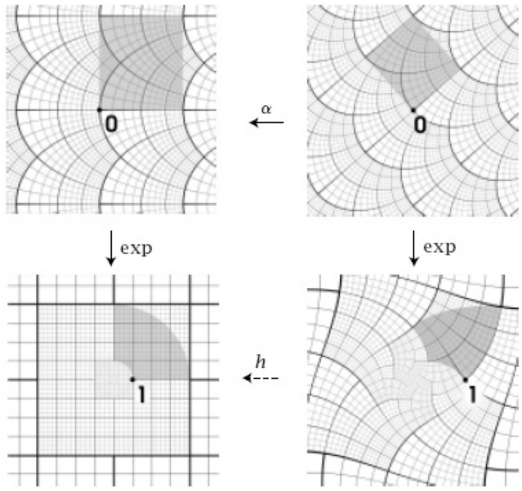
Tính chất then chốt của ánh xạ h được thể hiện qua lời trích dẫn trong [1], "...các hình vuông ban đầu vẫn duy trì tốt hình dạng của nó khi được thể hiện ra trên tranh". Tức là Escher mong muốn ánh xạ h là một *phép biến đổi bảo giác*, hay nói cách khác, nó là một đẳng cấu giữa các đa tạp giải tích phức một chiều.

Ta dễ dàng hiểu rõ cấu trúc của nhóm $\mathbb{C}^*/\langle\delta\rangle$, với $\delta \in \mathbb{C}^*$ và $|\delta| \neq 1$. Ánh xạ mũ $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ cảm sinh một toàn ánh bảo giác $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*/\langle\delta\rangle$. Toàn ánh bảo giác này giúp ta đồng nhất $\mathbb{C}$ với *không gian phủ phổ dụng* của $\mathbb{C}^*/\langle\delta\rangle$ và có hạch là $L_\delta = \mathbb{Z}2\pi i + \mathbb{Z}\ln\delta$, có thể được đồng nhất với *nhóm cơ bản* của $\mathbb{C}^*/\langle\delta\rangle$. Cũng vậy, ta có thể xem $\mathbb{C}^*/\langle\delta\rangle$ như là một bản sao của *đường cong elliptic* $\mathbb{C}/L_\delta$

Với các thông tin này, ta sẽ tìm hiểu thêm một số tính chất khác của ánh xạ $h : \mathbb{C}^*/\langle\gamma\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^*/\langle 256\rangle$. Bằng cách chọn tọa độ thích hợp, ta có thể giả sử $h(1) = 1$. Tiếp theo ta nâng ánh xạ h lên thành một phép bảo giác duy nhất $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ biến 0 thành 0 và ánh xạ bảo giác này cảm sinh một đẳng cấu nhóm $\mathbb{C}/L_\gamma \to \mathbb{C}/L_{256}$. Bây giờ, theo một kết quả kinh điển về các xuyến phức (xem [2, Ch. VI, Theorem 4.1]) ta suy ra rằng ánh xạ $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nói trên là một phép nhân với một vô hướng $\alpha \in \mathbb{C}$ thỏa $\alpha L_\gamma = L_{256}$. Kết hợp tất cả các thông tin ở trên, ta thu được một đẳng cấu giữa hai dãy khớp ngắn sau.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & L_\gamma & \to & \mathbb{C} & \xrightarrow{\exp} & \mathbb{C}^*/\langle\gamma\rangle & \to 0 \\ & \alpha\big\downarrow & & \alpha\big\downarrow & & h\big\downarrow & \\ 0 \to & L_{256} & \to & \mathbb{C} & \xrightarrow{\exp} & \mathbb{C}^*/\langle 256\rangle & \to 0. \end{array}$$

Hình 10 minh họa hình vuông giao hoán bên phải.



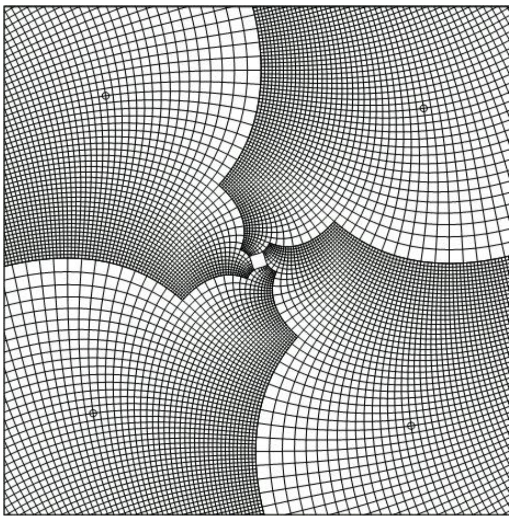
Hình 10. Hình bên trái, phía dưới trong $\mathbb{C}^*$ là bất biến qua các phép nhân bởi i và 4. Nghịch ảnh của hình này trong $\mathbb{C}$ qua ánh xạ mũ $\exp$ sẽ cho ta một hình mới bất biến qua phép tịnh tiến theo dàn $\frac{1}{4}L_{256} = \mathbb{Z}\pi i/2 + \mathbb{Z}\ln 4$. Nghịch ảnh của hình này qua phép nhân với vô hướng $\alpha = (2\pi i + \ln 256)/(2\pi i)$ sẽ cho ta hình trên cùng bên phải. Phép nhân này biến đổi dàn trên thành dàn $\frac{1}{4}L_\gamma = \mathbb{Z}\pi i/2 + \mathbb{Z}(\pi i \ln 4)/(\pi i + 2\ln 4)$. Vì dàn này chứa $2\pi i$ nên ảnh của hình nói trên qua ánh xạ mũ sẽ là hình dưới cùng bên phải. Hình này bất biến dưới các phép nhân bởi các căn bậc 4 của γ. Mũi tên nằm ngang bên dưới biểu thị cho ánh xạ đa trị $w \mapsto h(w) = w^\alpha = e^{\alpha \ln w}$. Ánh xạ này là đơn trị modulo hệ số của phép co giãn.

Để tính α, ta xem ánh xạ nhân $(\cdot)\alpha : L_\alpha \to L_{256}$ như là một đồng cấu giữa các nhóm cơ bản. Thật vậy, ánh xạ này chính là đẳng cấu giữa hai nhóm cơ bản của $\mathbb{C}^*/\langle\alpha\rangle$ và $\mathbb{C}^*/\langle 256\rangle$ được cảm sinh bởi h. Phần tử $2\pi i$ trong nhóm cơ bản L_γ của $\mathbb{C}^*/\langle\gamma\rangle$ tương ứng với chu trình đơn liên trong $\mathbb{C}^*$ ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc tọa độ. Chính xác đến một phép đồng luân, nó chính là đường $ABCDA$ dọc theo các cạnh trong lưới mà ta đã xét. Như ta thấy, qui trình Escher biến đường này thành một đường trong $\mathbb{C}^*$ đi quanh gốc tọa độ đúng một lần đồng thời nhân với 256; trong $\mathbb{C}^*/\langle 256\rangle$, đường này trở thành một vòng kín có phần tử đại diện là $2\pi i + \ln 256$ trong L_{256}. Vậy đẳng cấu $(\cdot)\alpha : L_\alpha \to L_{256}$ đang xét sẽ biến $2\pi i$ thành $2\pi i + \ln 256$, và do đó $\alpha = (2\pi i + \ln 256)/(2\pi i)$. Dàn L_γ lúc này được cho bởi $L_\gamma = \alpha^{-1}L_{256}$, và từ $|\gamma| > 1$ ta suy ra

$$\gamma = \exp(2\pi i(\ln 256)/(2\pi i + \ln 256))$$
$$= \exp(3,1172277221 + 2,7510856371i).$$

Còn ánh xạ h bây giờ được cho bởi công thức đơn giản

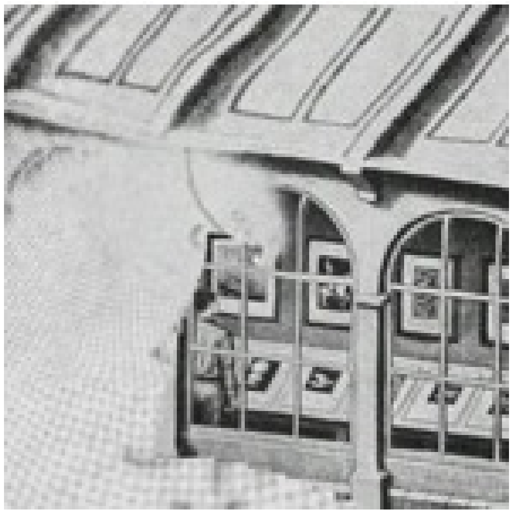
$$h(w) = \exp(w) = w^{(2\pi i + \ln 256)/(2\pi i)}.$$



Hình 11. Lưới bảo giác hoàn hảo.

Từ công thức này ta thu được lưới như trong Hình 11. Nó có hình dạng rất giống với lưới Escher trong Hình 4. Hình vuông nhỏ ở chính giữa của lưới này nhỏ hơn so với hình vuông trong lưới Escher. Lý do là ta chọn $|\gamma| = 22,58$, lớn hơn giá trị đo được trong lưới Escher. Độc giả có thể nhận ra một số điểm sai biệt khác. Những khác biệt này cho thấy Escher đã không đạt được một kết quả hoàn hảo cho mục đích ban đầu là vẽ nên một lưới bảo giác. Nhưng ta cũng thật sự ngạc nhiên rằng Escher đã đạt được đến độ chính xác như thế trong quá trình tạo ra tác phẩm này.

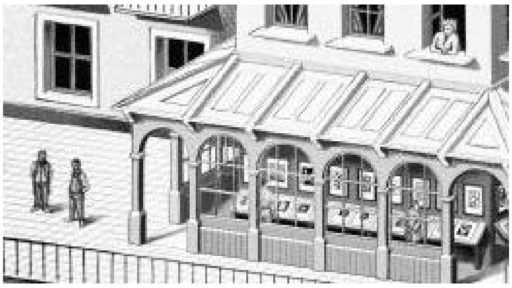
Lấp đầy vệt trắng



Hình 12. Thạch bản của Escher được duỗi thẳng từ lưới Escher.

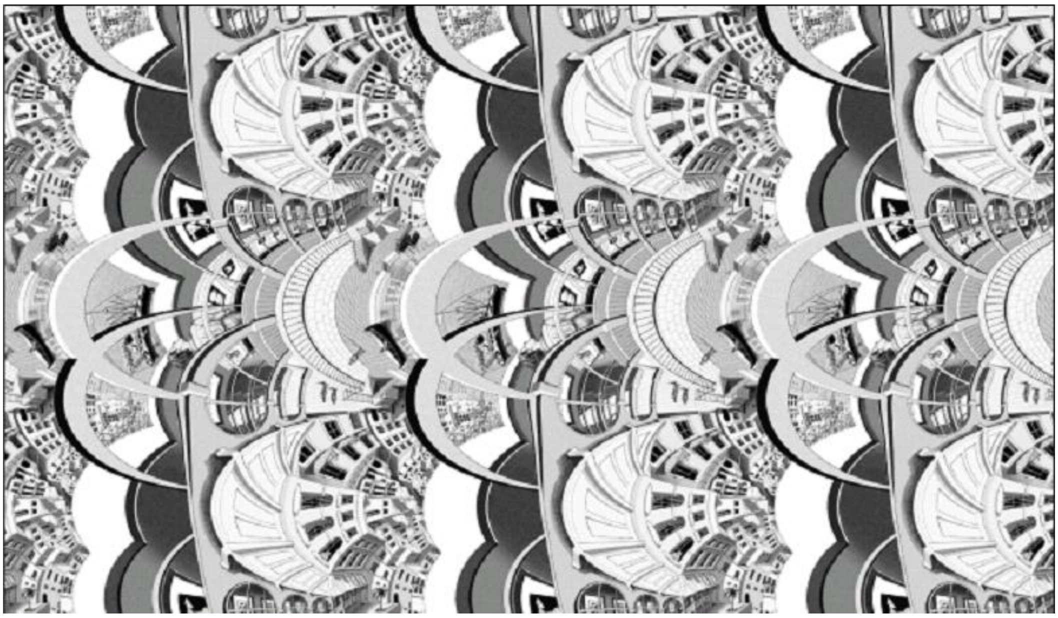
Để lấp đầy vệt tròn màu trắng trong "Phòng tranh", đầu tiên chúng tôi khôi phục lại các phác họa trên lưới của Escher và trên thạch bản bằng cách thực hiện ngược lại qui trình của Escher. Để làm được điều này, chúng tôi dùng một phần mềm chuyên biệt của Joost Batenburg, một sinh viên toán ở Leiden. Như ta thấy trong Hình 12, đốm trắng ở giữa trong tác phẩm của Escher sẽ tương ứng với một vùng trống hình xoắn ốc trong phác họa do chúng tôi khôi phục lại, ngoài ra còn có những sai biệt khác nữa.

Tiếp theo, hai họa sĩ người Hà Lan là Hans Richter và Jacqueline Hofstra đã hoàn thiện và điều chỉnh kết quả thu được như trong Hình 13.

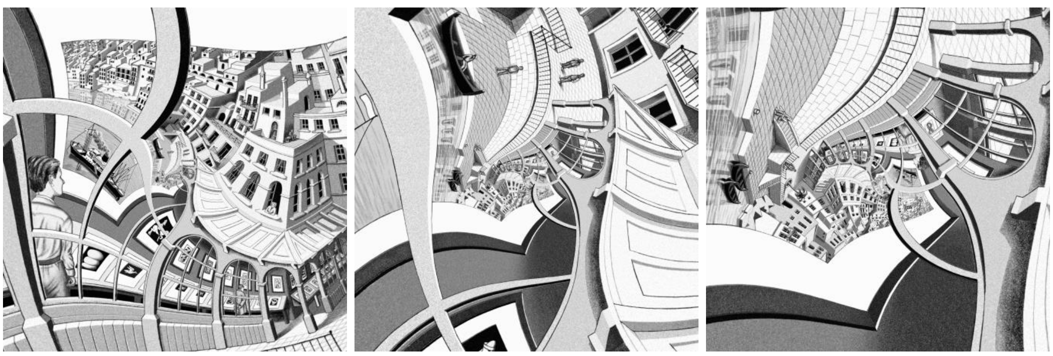


Hình 13. Một chi tiết trong bức vẽ của Hans Richter và Jacqueline Hofstra.

Đến giai đoạn phối màu, điều chỉnh độ đậm nhạt, chúng tôi gặp phải các vấn đề về độ dày không đều của các đường nét và độ phân giải không liền mạch trong phác họa. Khi đó chúng tôi đã quyết định dùng một phương thức tự nhiên để vượt qua những trở ngại này, bằng cách yêu cầu các điểm ảnh (pixel) phải được phân bố đều theo độ đo Haar trên đường cong elliptic nói trên. Ta làm điều này bằng cách xét nghịch ảnh của các phác họa này qua ánh xạ mũ để thu được một hình trên lưới cong trong $\mathbb{C}$. Trên hình này, Jacqueline Hofstra đã phối màu để thu được hình có tính chất tuần hoàn với chu kì kép như trong Hình 14. Khi đó phiên bản lí tưởng hóa của tác phẩm ban đầu sẽ được tạo ra một cách dễ dàng như Hình 15.



Hình 14. Nghịch ảnh của hình trên lưới thẳng qua hàm mũ tạo nên một hình tuần hoàn với chu kì kép trên lưới cong, sau khi được phối màu. Chu kì chiều ngang là $\ln 256$, chu kì thẳng đứng là $2\pi i$.



Hình 15. Phiên bản lý tưởng của tác phẩm cùng với vùng trung tâm được phóng to lên 4 và 8 lần.

Cho δ thay đổi ta thu được các ánh xạ giải tích khác nhau $h : \mathbb{C}^*/\langle\delta\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^*/\langle 256\rangle$, và các ánh xạ này cho ta những phiên bản thú vị khác của tác phẩm "Phòng tranh". Độc giả có thể tham khảo thêm website sau đây để xem những hình ảnh này, cùng với các ảnh động được phóng to của vùng trung tâm tác phẩm `http://escherdroste.math.leidenuniv.nl`

TÀI LIỆU

[1] Bruno Ernst, *De toverspiegel van M. C. Escher,* Meulen-hoff, Amsterdam, 1976. Bản dịch tiếng Anh của John E. Brigham: *The Magic Mirror of M. C. Escher,* Ballantine Books, New York, 1976.

[2] Joseph Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves,* Springer-Verlag, New York, 1986.

[3] Erik Thé, *The Magic of M. C. Escher,* Harry N. Abrams, New York and London, 2000.

Người dịch: **Nguyễn An Khương** (Trường ĐH Kỹ thuật Công nghệ Tp. HCM)

Dịch từ bản tiếng Anh với sự cho phép của Notices AMS, các tác giả và những người giữ bản quyền các tranh, hình trong bài. Công ty MC Escher (Hà Lan) giữ bản quyền bức tranh của Escher và Hans de Rijk (Bruno Ernst) giữ bản quyền các hình còn lại trong bài.

Nhà toán học Thụy Điển
Lars V. Hörmander (1931-2012)

Nguyễn Thị Tuyết Mai *và* **Nguyễn Thị Quỳnh Trâm** (Đại học Thương mại)

Lars V. Hörmander sinh ngày 24/1/1931 tại Mjallby, một làng chài nằm ven bờ biển phía nam Thụy Điển. Thời thơ ấu, ông theo học tại ngôi trường trong làng, sau đó chuyển đến thành phố Lund để học ở cấp cao hơn (Gymnasium). Ở đây ông được một thầy giáo là học trò của nhà toán học nổi tiếng Marcel Riesz khuyến khích học các kiến thức toán cao cấp. Ông tốt nghiệp năm 1948 và tiếp tục học đại học tại đại học Lund. Ở trường đại học, Hörmander có cơ hội học trực tiếp Marcel Riesz các môn lý thuyết hàm cổ điển và giải tích điều hòa. Năm 1950 ông nhận bằng thạc sĩ và bắt đầu nghiên cứu dưới sự hướng dẫn của Riesz. Hörmander khởi đầu nghiên cứu lý thuyết phương trình đạo hàm riêng sau khi Riesz nghỉ hưu năm 1952.

Trong thời gian làm luận án tiến sỹ, Hörmander có hai năm thực hiện nghĩa vụ quân sự (1953-1954). Khoảng thời gian đó, ông vẫn tiếp tục các nghiên cứu của mình. Sau khi hoàn thành luận án tiến sĩ vào năm 1955, ông đăng kí vị trí giáo sư tại đại học Stockholm, tuy nhiên trước khi có quyết định ông đã rời Thụy Điển sang Mỹ và làm việc tại các trường đại học Chicago, Kansas và Minnesota. Năm 1962, tại Đại hội Toán học thế giới tổ chức tại Stockholm, Hörmander được trao huy chương Fields nhờ những đóng góp cho lý thuyết phương trình đạo hàm riêng. Công trình của ông đã trả lời nhiều câu hỏi quan trọng về các hiện tượng vật lý như thời tiết, điện tử, dòng chất lỏng... Lars Hörmander và Lars Ahlfors (1936) là hai người Thụy Điển nhận được huy chương cao quý này tính đến nay.

Hörmander đã xác định không rời Thụy Điển, tuy nhiên khi nhận được đề nghị cho vị trí giáo sư tại Viện Nghiên cứu cao cấp (IAS) ở Princeton thì cơ hội làm nghiên cứu trong một môi trường toán học năng động khiến ông khó cưỡng lại. Ông đã làm việc tại IAS trong những năm 1964-1968. Sau đó ông quay lại Thụy Điển và làm việc tại đại học Lund.

Ông nổi tiếng với quyển sách "Các toán tử đạo hàm riêng tuyến tính" (1963), trong đó chứa đựng những kết quả dẫn đến huy chương Fields của ông. Đặc biệt, ông đã dành bốn năm để hoàn thành bản thảo bốn tập "Giải tích của các toán tử đạo hàm riêng tuyến tính" xuất bản giữa những năm 1983-1985. Quyển sách này vẫn được coi là mẫu mực trong lĩnh vực phương trình đạo hàm riêng.

Hörmander là phó chủ tịch Liên đoàn Toán học thế giới từ năm 1987 đến năm 1990. Ông là viện sỹ viện Hàn lâm khoa học hoàng gia Thụy Điển. Bên cạnh huy chương Fields, ông cũng là chủ nhân giải thưởng Wolf (1988) và giải thưởng Leoroy P. Steele dành cho mục Trình bày toán học (Mathematical exposition, 2006).

Hörmander mất ngày 25/11/2012 tại Lund, hưởng thọ 81 tuổi.

Tin tức hội viên và hoạt động toán học

LTS: *Để tăng cường sự hiểu biết lẫn nhau trong cộng đồng các nhà toán học Việt Nam, Tòa soạn mong nhận được nhiều thông tin từ các hội viên HTHVN về chính bản thân, cơ quan hoặc đồng nghiệp của mình.*

Trong khuôn khổ **Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển Toán học đến năm 2020** (PTTH2020), Bộ GD&ĐT đã ra quyết định thưởng cho 37 công trình toán học năm 2012 do các giảng viên các trường đại học, cao đẳng và giáo viên các trường phổ thông thực hiện. Các công trình được thưởng phải là những bài báo đăng trên các tạp chí quốc tế hoặc sách do các nhà xuất bản quốc tế uy tín xuất bản. Mục đích của việc trao thưởng là khuyến khích giảng viên toán ở các trường đại học, cao đẳng và giáo viên toán ở các trường phổ thông đẩy mạnh nghiên cứu khoa học.

Bên cạnh đó, Chương trình PTTH2020 cũng trao học bổng cho sinh viên toán ở các trường đại học và học sinh chuyên toán ở các trường phổ thông có thành tích học tập xuất sắc.

Thông tin thêm có thể xem trên trang web của viện NCCCT tại địa chỉ `http://viasm.edu.vn/npdm`

Trường Xuân về Tổ hợp hình học từ ngày 19/02 - 15/03/2013 tại Viện Toán học được tổ chức bởi Viện Toán học và Trường toán Berlin trong khuôn khổ chương trình hợp tác giữa Viện Toán học và các trường đại học tại Berlin. Hơn 30 học viên, trong đó có 10 học viên từ Đức đã tham dự Trường Xuân.

GS. Ngô Việt Trung, PGS. Phan Thị Hà Dương, TS. Trần Nam Trung và TS. Hà Minh Lam đã giảng các bài giảng chuẩn bị cho Trường Xuân. GS. Günter M. Ziegler

(FU Berlin) giảng về biểu diễn các đa diện lồi trong không gian nhiều chiều, các GS. Raman Sanyal (FU Berlin) và Matthias Beck (San Francisco State University) giảng về các vấn đề tính toán tổ hợp trên các tập lồi đa diện mà công cụ là các phân hoạch tập lồi đa diện bằng các phức đa diện. Các bài giảng đều rất hay và gây nhiều hứng thú cho những người tham dự.

Mỗi buổi làm việc, sau bài giảng là đến phiên tự chữa bài tập của các học viên. Không khí trao đổi sôi nổi giữa các bạn trẻ của Việt Nam và Đức xung quanh những vấn đề do các giáo sư đưa ra đã để lại nhiều ấn tượng rất tốt đối với các bạn học viên của hai nước.

Giải thưởng Lê Văn Thiêm năm nay đã được trao nhân cuộc gặp mặt đầu Xuân Quý Tỵ do Hội Toán học tổ chức ngày 2/3/2013. Danh sách cá nhân nhận giải thưởng như sau

Giáo viên: Nhà giáo **Nguyễn Duy Liên** (sn 1962), trường THPT chuyên Vĩnh Phúc. Thầy Nguyễn Duy Liên đã bồi dưỡng nhiều học sinh đoạt giải cao, trong đó trực tiếp giảng dạy 21 học sinh đoạt giải cấp quốc gia, một em đoạt huy chương vàng quốc tế.

Học sinh:

1. **Đậu Hải Đăng**, trường THPT chuyên ĐH Sư phạm Hà Nội, giải nhì HSG quốc gia 2011, giải nhất HSG quốc gia 2012 và huy chương vàng IMO 2012. Đậu Hải Đăng hiện nay đang học tại Khoa Toán-Cơ-Tin học, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội.

2. **Nguyễn Phương Minh**, trường THPT chuyên ĐH Sư phạm Hà Nội, giải nhì HSG quốc gia các năm 2011, 2012 và huy chương bạc IMO 2012. Nguyễn Phương Minh hiện nay đang học tại Khoa Toán-Tin học, ĐH Sư phạm Hà Nội.

3. **Phan Hồng Hạnh Trinh**, nữ, lớp 12 trường THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Kon Tum, huy chương vàng kỳ thi 30/4 năm 2012 và giải nhì HSG quốc gia 2013. Hạnh Trinh là học sinh đầu tiên của trường THPT chuyên tỉnh Kon Tum đoạt giải nhì và tham dự kỳ thi tuyển chọn đội tuyển IMO 2013 của Việt Nam.

Trách nhiệm mới

GS. TS. Đặng Đức Trọng được tái bổ nhiệm là trưởng khoa Toán-Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh. Ngoài ra, ban chủ nhiệm khoa Toán-Tin học còn có các phó trưởng khoa gồm **TS. Phạm Thế Bảo** (chuyên ngành Tin học) được bổ nhiệm lại và hai phó trưởng khoa được bổ nhiệm mới là **TS. Trịnh Thanh Đèo** (chuyên ngành Đại số) và **TS. Huỳnh Quang Vũ** (chuyên ngành Giải tích).

Mục Tin tức hội viên và hoạt động toán học số này được thực hiện với sự cộng tác của Trần Nam Trung (Viện Toán học).

Tin Toán học thế giới

Toán học của Hành tinh Trái đất (MPE2013) là chủ đề được dành cho năm đặc biệt 2013 bởi hơn một trăm hiệp hội, trường đại học, viện nghiên cứu, tổ chức trên khắp thế giới, bao gồm UNESCO. Tất cả các hoạt động trên hành tinh đều có thể xem như những hệ động lực theo nghĩa rộng lớn nhất, từ các quá trình địa chất, khí quyển, .. đến các quá trình của con người như tài chính, nông nghiệp, giao thông, năng lượng, .. Những thách thức của hành tinh trái đất và nền văn minh ngày nay mang tính chất đa ngành và nhiều mặt, trong đó toán học đóng vai trò trung tâm trong những nỗ lực của khoa học để tìm hiểu và đối phó với những thách thức này.

MPE2013 là một dự án toàn cầu nhằm khuyến khích các hoạt động nghiên cứu, giáo dục và tăng cường nhận thức của cộng đồng đối với các vấn đề của hành tinh trái đất cũng như vai trò trung tâm của các khoa học về toán trong việc đối mắt với các thách thức này.

Các hoạt động chính trong khuôn khổ MPE bao gồm việc tổ chức các chương trình dài hạn, các hội nghị, trường hè, các bài giảng toàn thể ở các hội nghị lớn, các bài giảng đại chúng, triển lãm, ..

Thông tin có thể xem trên trang web của MPE `http://mpe2013.org`

Hội Toán học Mỹ (AMS) kỷ niệm 125 năm thành lập. Được thành lập từ năm 1888 nhằm thúc đẩy các lợi ích của nghiên cứu và đào tạo toán học, hiện nay AMS có trên 30 ngàn thành viên là các nhà toán học và trên 570 thành viên là các cơ sở nghiên cứu và đào tạo từ khắp nơi trên thế giới.

Ngày nay AMS đóng vai trò quan trọng đối với nền toán học Mỹ và có ảnh hưởng rộng lớn đối với toán học thế giới thông qua việc tổ chức các hội nghị, xuất bản sách và tạp chí, các giải thưởng. Đặc biệt, Mathematical Reviews, hay được biết với tên thông dụng là MathSciNet, là một cơ sở dữ liệu tìm kiếm khổng lồ và rất hữu ích đối với các nhà toán học trên toàn thế giới.

Kỷ niệm 125 năm thành lập của AMS sẽ thông qua rất nhiều hoạt động trong cả năm nay.

Bách khoa toàn thư về Toán học (Encyclopedia of Mathematics) là nguồn truy cập mở được thiết kế đặc biệt cho cộng đồng toán học. Bộ Bách khoa toàn thư Toán học trước đây được nhà xuất bản Kluwer in năm 2002. Hiện nay nhà xuất bản Springer hợp tác cùng với Hội Toán học Châu Âu đã đưa nội dung của bộ sách này lên mạng internet và mở với tất cả mọi người. Với hơn 8 ngàn mục và trên 50 ngàn khái niệm toán học, đây là nguồn tham khảo đồ sộ và cập nhật nhất hiện nay đối với cộng đồng toán học. Hiện nay các khái niệm mới của toán học vẫn được cập nhật vào bộ sách này hàng ngày thông qua một hội đồng biên tập.

Độc giả quan tâm có thể truy cập nội dung bộ sách tại
`http://www.encyclopediaofmath.org`

Giải thưởng Abel 2013 đã được Viện hàn lâm Khoa học và Văn chương Na Uy công bố trao cho nhà toán học gốc Bỉ Pierre Deligne, Viện Nghiên cứu cao cấp IAS, Princeton, Mỹ. Theo trang web của giải thưởng Abel, Deligne được trao giải Abel năm nay cho những đóng góp sâu sắc có ảnh hưởng lâu dài cho hình học đại số với những tác động làm thay đổi lên lý thuyết số, lý thuyết biểu diễn và những lĩnh vực liên quan. Pierre Deligne là một trong những học trò xuất sắc nhất của Grothendieck, ông nổi tiếng với lời giải giả thuyết Weil - một tương tự của giả thuyết Riemann cho đa tạp đại số, nhờ đó ông nhận được huy chương Fields năm 1978. Deligne chính là một trong hai thầy hướng dẫn luận án tiến sỹ của GS. Lê Dũng Tráng, người kia là Claude C. Chevalley. Ngoài hai giải thưởng trên, Deligne còn nhận được giải thưởng Crafoord (1988), giải thưởng Balzan (2004) và giải thưởng Wolf (2008).

Giải thưởng Abel được trao kèm khoản tiền 6 triệu Krone Na Uy (xấp xỉ 1 triệu đô la Mỹ).

Giải thưởng Wolf năm 2013 sẽ được trao cho tám nhà khoa học và nghệ sỹ. Các giáo sư George Mostow (Đại học Yale, Mỹ) và Michael Artin (MIT, Mỹ) cùng nhận giải thưởng cho mục Toán học. Mostow được trao giải vì những đóng góp tiên phong và nền tảng cho hình học và lý thuyết nhóm Lie. Ông nguyên là chủ tịch thứ 49 của Hội Toán học Mỹ (1987-1988) và là viện sỹ viện Hàn lâm khoa học quốc gia Mỹ. Michael Artin là nhà hình học lớn của thế kỷ 20, những đóng góp của ông cho hình học đại số có tính cơ bản và luôn gây kinh ngạc vì sự sâu sắc và phạm vi rộng lớn.

Yakov Sinai (ĐH Princeton, Mỹ) đã nhận giải thưởng Steele năm 2013 của Hội Toán học Mỹ cho mục Thành tựu trọn đời. Yakov Sinai nguyên học trò của Andrey Kolmogorov, ông là giáo sư tại đại học Lomonosov, Nga, trước khi chuyển sang đại học Princeton năm 1993. Các công trình của ông có vai trò nền tảng trong lý thuyết hệ động lực, lý thuyết ergodic, lý thuyết xác suất, cơ học thống kê và vật lý toán. Theo lời giới thiệu giải thưởng Steele, nổi bật trong các công trình của ông là sự kết hợp độc đáo của các kỹ thuật giải tích tài tình, trực giác hình học sắc sảo và sự hiểu biết sâu sắc các hiện tượng cơ bản của vật lý.

Yakov Sinai. *Nguồn: Internet*

Danh sách xếp hạng các tạp chí toán học của Hội đồng Nghiên cứu Australia (ARC) năm 2010

(tiếp)

Các tạp chí toán lý thuyết - Phần 1 [(1)]

Nhóm A* (Thứ tự theo bảng chữ cái)

1. Acta Mathematica
2. Advances in Mathematics
3. American Journal of Mathematics
4. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure
5. Annals of Mathematics
6. Applied and Computational Harmonic Analysis

(1) Danh sách các tạp chí toán ứng dụng, toán học tính toán và thống kê đã được đăng trong TTTH Tập 16 Số 3, 4. Danh sách các tạp chí toán lý thuyết sẽ được chia đăng trong hai số 1, 2 của Tập 17.

7. Archive for Rational Mechanics and Analysis
8. Bulletin of the American Mathematical Society
9. Calculus of Variations and Partial Differential Equations
10. Commentarii Mathematici Helvetici
11. Communications in Partial Differential Equations
12. Communications on Pure and Applied Mathematics
13. Duke Mathematical Journal
14. Ergodic Theory & Dynamical Systems
15. Geometric and Functional Analysis
16. Geometry and Topology
17. Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Paris. Publications Mathematiques
18. Inventiones Mathematicae
19. Journal de Mathematiques Pures et Appliquees
20. Journal fuer die Reine und Angewandte Mathematik: Crelle's journal
21. Journal of Algebra
22. Journal of Combinatorial Theory: Series A
23. Journal of Combinatorial Theory: Series B
24. Journal of Differential Equations
25. Journal of Differential Geometry
26. Journal of Functional Analysis
27. Journal of Mathematical Logic
28. Journal of the American Mathematical Society
29. Journal of the European Mathematical Society
30. London Mathematical Society. Proceedings
31. Mathematische Annalen
32. Memoirs of the American Mathematical Society
33. Transactions of the American Mathematical Society

Nhóm A

34. Advanced Nonlinear Studies
35. Advances in Differential Equations
36. Algebraic and Geometric Topology
37. Annali di Matematica Pura ed Applicata
38. Annals of Combinatorics
39. Annals of Pure and Applied Logic
40. Asterisque
41. Bulletin of the London Mathematical Society
42. Cambridge Philosophical Society. Mathematical Proceedings
43. Canadian Journal of Mathematics
44. Communications in Analysis and Geometry
45. Communications in Contemporary Mathematics
46. Communications in Mathematical Sciences
47. Communications in Number Theory and Physics
48. Compositio Mathematica
49. Conformal Geometry and Dynamics
50. Design, Codes and Cryptography
51. Differential and Integral Equations
52. Differential Geometry and Its Applications
53. Discrete and Computational Geometry
54. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A
55. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B
56. Dissertationes Mathematicae
57. Documenta Mathematica
58. European Journal of Combinatorics
59. Experimental Mathematics
60. Fundamenta Mathematicae
61. Fuzzy Sets and Systems
62. Indiana University Mathematics Journal
63. Institut Fourier. Annales
64. International Journal of Algebra and Computation

65. International Journal of Mathematics
66. International Mathematics Research Notices
67. Israel Journal of Mathematics
68. Japanese Journal of Mathematics
69. Journal d'Analyse Mathematique
70. Journal of Algebraic Combinatorics
71. Journal of Algebraic Geometry
72. Journal of Approximation Theory
73. Journal of Combinatorial Designs
74. Journal of Convex Analysis
75. Journal of Difference Equations and Applications
76. Journal of Dynamics and Differential Equations
77. Journal of Evolution Equations
78. Journal of Experimental Algorithmics
79. Journal of Fourier Analysis and Applications
80. Journal of Geometric Analysis
81. Journal of Graph Theory
82. Journal of Lie Theory
83. Journal of London Mathematical Society
84. Journal of Mathematical Analysis and Applications
85. Journal of Mathematical Society of Japan
86. Journal of Operator Theory
87. Journal of Pure and Applied Algebra
88. Journal of Symplectic Geometry
89. Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu
90. K-Theory
91. L'Enseignement Mathematique
92. Linear Algebra and Its Applications
93. Logical Methods in Computer Science
94. Mathematical Research Letters
95. Mathematische Zeitschrift
96. Michigan Mathematical Journal
97. Moscow Mathematical Journal
98. Nagoya Mathematical Journal
99. No DEA - Nonlinear Differential Equations and Applications
100. Notre Dame Journal of Formal Logic
101. Pacific Journal of Mathematics
102. Potential Analysis
103. Proceedings of the American Mathematical Society
104. Pure and Applied Mathematics Quarterly
105. Quarterly Journal of Mathematics
106. Random Structures and Algorithms
107. Representation Theory
108. Revista Matematica Iberoamericana
109. Scuola Normale Superiore di Pisa. Annali. Classe di Scienze
110. Selecta Mathematica
111. Semigroup Forum
112. SIAM Journal on Discrete Mathematics
113. SIAM Journal on Mathematical Analysis
114. St. Petersburg Mathematical Journal
115. Studia Logica
116. Studia Mathematica
117. Topology
118. The Bulletin of Symbolic Logic
119. The Journal of Logic and Algebraic Programming
120. The Journal of Symbolic Logic
121. Transformation Groups

Nhóm B

122. Abstract and Applied Analysis
123. Academie des Sciences. Comptes Rendus. Mathematique
124. Acta Arithmetica
125. Acta Mathematica Hungarica
126. Acta Mathematica Scientia
127. Acta Mathematica Sinica
128. Acta Universitatis Szegediensis. Acta Scientiarum Mathematicarum
129. Advances in Difference Equations
130. Advances in Geometry
131. Advances in Nonlinear Variational Inequalities
132. Aequationes Mathematicae

133. African Diaspora Journal of Mathematics
134. Algebra and Logic
135. Algebra and Number Theory
136. Algebra Universalis
137. Algebras and Representation Theory
138. American Mathematical Monthly
139. American Mathematical Society. Notices
140. An international journal of Dynamical Systems
141. Analysis Mathematica
142. Analysis
143. Annals of Global Analysis and Geometry
144. Applicable Analysis: an international journal
145. Applied Categorical Structures: a journal devoted to applications of categorical methods in algebra,
146. Archiv der Mathematik
147. Archive for Mathematical Logic
148. Arkiv foer Matematik
149. Asymptotic Analysis
150. Australasian Journal of Combinatorics
151. Beitraege zur Algebra und Geometrie
152. Boundary Value Problems
153. Bulletin des Sciences Mathematiques
154. Bulletin of the Australian Mathematical Society
155. Bulletin of the Malaysian Mathematical Society
156. Canadian Mathematical Bulletin
157. Central European Journal of Mathematics
158. Collectanea Mathematica
159. Colloquium Mathematicum
160. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
161. Communications in Algebra
162. Complex Variables and Elliptic Equations
163. Czechoslovak Mathematical Journal
164. Discrete Mathematics
165. Discrete Mathematics and Applications
166. Doklady Mathematics
167. Dynamics of Partial Differential Equations
168. East Journal on Approximations
169. Electronic Journal of Differential Equations
170. Expositiones Mathematicae
171. Extracta Mathematicae
172. Finite Fields and Their Applications
173. Fixed Point Theory and Applications
174. Forum Mathematicum
175. Functional Analysis and Its Applications
176. Functional Differential Equations
177. Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika (Moscow)
178. Geometriae Dedicata
179. Glasgow Mathematical Journal
180. Graphs and Combinatorics
181. Groups, Geometry, and Dynamics
182. Hokkaido Mathematical Journal
183. Homology, Homotopy and Applications
184. Houston Journal of Mathematics
185. Illinois Journal of Mathematics
186. Indagationes Mathematicae
187. Innovations in Incidence Geometry
188. International Journal of Differential Equations and Applications
189. International Journal of Number Theory
190. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics
191. Izvestiya: Mathematics
192. Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux
193. Journal of Group Theory
194. Journal of Hyperbolic Differential Equations
195. Journal of Inequalities and Applications
196. Journal of Interdisciplinary Mathematics

197. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems
198. Journal of Knot Theory and Its Ramifications
199. Journal of Mathematics and Statistics
200. Journal of Noncommutative Geometry
201. Journal of Number Theory
202. Journal of the Australian Mathematical Society
203. Kodai Mathematical Journal
204. Korean Mathematical Society
205. Kyushu Journal of Mathematics
206. Linear and Multilinear Algebra
207. Logic Journal of the IGPL
208. Manuscripta Mathematica
209. Matematica Contemporanea
210. Mathematica Scandinavica: ediderunt societates mathematicae Daniae Fenniae Islandiae Norvegiae Sveci
211. Mathematical Inequalities and Applications
212. Mathematical logic quarterly
213. Mathematika: a journal of pure and applied mathematics
214. Mathematische Nachrichten
215. Methods of Functional Analysis and Topology
216. Milan Journal of Mathematics
217. Monatshefte fuer Mathematik
218. Nonlinear Analysis: modelling and control
219. Numerical Linear Algebra with Applications
220. Order: a journal on the theory of ordered sets
221. Osaka Journal of Mathematics
222. Periodica Mathematica Hungarica
223. Positivity
224. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society
225. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A Mathematics
226. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics
227. Publicacions Matematiques
228. Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences
229. Results in Mathematics
230. Revista Matematica Complutense
231. Rocky Mountain Journal of Math.
232. Russian Academy of Sciences. Mathematical Notes
233. Russian Mathematical Surveys
234. Sbornik: Mathematics
235. Science in China. Series A: Mathematics
236. Set-Valued and Variational Analysis
237. Siberian Mathematical Journal
238. Sociedade Brasileira de Matematica. Boletim, Nova Serie
239. Societe Mathematique de France. Bulletin
240. Southeast Asian Bulletin of Mathematics
241. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications
242. Tohoku Mathematical Journal
243. Tokyo Journal of Mathematics
244. Topology and Its Applications
245. Topological Methods in Nonlinear Analysis
246. Turkish Journal of Mathematics
247. The Asian Journal of Mathematics
248. The Fibonacci Quarterly: a journal devoted to the study of integers with special properties
249. The Journal of Homotopy and Related Structures
250. The New York Journal of Mathematics
251. The Ramanujan Journal: an international journal devoted to areas of mathematics influenced by Ramanu
252. Theory and Applications of Categories
253. Ukrainian Mathematical Bulletin
254. Uniform Distribution Theory
255. Universitaet Hamburg. Mathematisches Seminar. Abhandlungen
256. Zeitschrift für Analysis und Ihre Anwendungen

Dành cho các bạn trẻ

LTS: "*Dành cho các bạn trẻ*" *là mục dành cho Sinh viên, Học sinh và tất cả các bạn trẻ yêu Toán. Tòa soạn mong nhận được các bài viết hoặc bài dịch có giá trị cho chuyên mục.*

Phương pháp xác suất *(tiếp theo)*

Trần Nam Dũng (Trường Đại học KHTN, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

3. Phương pháp xác suất ứng dụng trong các bài toán Olympic

Kết quả đơn giản sau đây là bổ đề chìa khóa cho rất nhiều bài toán giải bằng phương pháp xác suất:

Bổ đề 3.1. *Cho X là biến ngẫu nhiên. Khi đó tồn tại điểm nào đó của không gian xác suất mà $X \geq E(X)$, và tồn tại điểm bào đó của không gian xác suất mà $X \leq E(X)$.*

Bài toán 4 (Iran TST, 2008). *Giả sử rằng 799 đội bóng chuyền tham gia vào một giải đấu mà trong đó hai đội bất kỳ đấu với nhau đúng một lần. Chứng minh rằng tồn tại hai nhóm A và B rời nhau, mỗi nhóm có 7 đội sao cho mỗi đội bóng của nhóm A đều thua các đội bóng của nhóm B.*

Lời giải. Xét giải đấu như một đồ thị có hướng đầy đủ. Ta xét A là một tập ngẫu nhiên có 7 phần tử. Gọi X là số đội thắng tất cả các đội của A. Gọi $d(v^-)$ là bậc vào của v, ta có

$$E(X) = \frac{\sum_v C^7_{d(v^-)}}{C^7_{799}}.$$

Nhưng $\sum_v d(v^-) = C^2_{799}$, nghĩa là bậc trong trung bình của một đỉnh đúng bằng 399. Theo tính lồi của hàm C^7_x ta có

$$E(X) \geq \frac{799 C^7_{399}}{C^7_{799}} \approx 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \approx 6.25.$$

Do X nhận giá trị nguyên, tồn tại A sao cho $X(A) \geq 7$. Với A như vậy, chỉ cần chọn 7 đội bóng của B từ nhóm đội thắng tất cả các đội của A. □

Bài toán 5 (Nga, 1996). *Trong viện Duma quốc gia có 1600 đại biểu, lập thành 16000 tiểu ban, mỗi tiểu ban có 80 người. Chứng minh rằng ta có thể tìm được hai tiểu ban có ít nhất 4 thành viên chung.*

Lời giải. Chọn ngẫu nhiên một cặp tiểu ban (tức là lấy một cách ngẫu nhiên một cặp trong C^2_{16000} cặp). Gọi X là số người có trong cả hai tiểu ban được chọn. Chú ý rằng $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1600}$, trong đó mỗi X_i là biến ngẫu nhiên $\{0, 1\}$ nói rằng người thứ i có mặt trong cả hai tiểu ban hay không. Theo tính tuyến tính của kỳ vọng, ta có

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{1600}).$$

Điều thần kỳ ở đây là mỗi một $E(X_i)$ có thể tính dễ dàng. Gọi n_i là số tiểu ban mà người thứ i thuộc vào. Khi đó,

$$E(X_i) = P(\text{người thứ } i \text{ được chọn vào cả hai tiểu ban}) = \frac{C^2_{n_i}}{C^2_{16000}}.$$

Thông tin duy nhất mà chúng ta biết về $\{n_i\}$ là tổng của chúng: $\sum_i n_i = 16000 \cdot 80$. Điều này gợi ý chúng ta sử dụng tính lồi để đánh giá $E(X)$ thông qua giá trị trung bình của $\{n_i\}$, được ký hiện là $\overline{n}$ và bằng $\overline{n} = \frac{16000 \cdot 80}{1600} =$

800:

$$E(X) \geq \frac{1600C_n^2}{C_{16000}^2} = \frac{1600C_{800}^2}{C_{16000}^2} = 3.995.$$

Nhưng theo bổ đề, ta biết rằng sẽ có một kết quả nào đó cho ta:

$$X \geq 3.995.$$

Vì X luôn là số nguyên, kết quả này thực sự phải có $X \geq 4$. Nói riêng, ta kết luận rằng có một cặp hai tiểu ban có ít nhất 4 thành viên chung. □

Bài toán 6. *Giả sử a, b, c là các số thực dương sao cho với mọi n nguyên thì*

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor bn \rfloor = \lfloor cn \rfloor.$$

Chứng minh rằng ít nhất một trong ba số a, b, c nguyên.

Ghi chú. Bạn có thể sử dụng kết quả lý thuyết số quen thuộc sau đây: Nếu x là số vô tỷ thì phần lẻ của các bội số của x phân bố đều trên đoạn $[0, 1]$. Nói riêng, nếu ta chọn n một cách ngẫu nhiên trong $\{1, 2, \ldots, N\}$ thì $E(\{xn\}) \to \frac{1}{2}$ khi $N \to \infty$.

Lời giải. Giả sử rằng không có số nào trong a, b, c là số nguyên. Chia hai vế cho n và cho n dần đến vô cùng, ta được $a + b = c$. Từ đó ta suy ra

$$\{an\} + \{bn\} = \{cn\}. \tag{1}$$

Nếu x vô tỷ thì $\{xn\}$ phân bố đều trên đoạn $[0, 1]$. Nói riêng, nếu ta chọn n một cách ngẫu nhiên trong $\{1, 2, \ldots, N\}$ thì $E(\{xn\}) \to \frac{1}{2}$ khi $N \to \infty$. Mặt khác, nếu x là số hữu tỷ có dạng tối giản là $\frac{p}{q}$ thì $\{xn\}$ có kỳ vọng tiến đến $\frac{q-1}{2q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}$. Như vậy nó nằm trong khoảng $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Tóm lại, với mọi số không nguyên x, ta có $E(\{xn\}) \to t$, trong đó $t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

Lấy kỳ vọng hai vế của (1), và cho n dần đến vô cùng, ta thấy rằng cách duy nhất để có đẳng thức là $E(\{an\})$ và $E(\{bn\})$ phải tiến đến $\frac{1}{4}$, và $E(\{cn\}) \to \frac{1}{2}$. Nhưng cách duy nhất để có kỳ vọng $\frac{1}{4}$ là khi a, b hữu tỷ, còn cách duy nhất để có kỳ vọng $\frac{1}{2}$ là c vô tỷ. Nhưng do $a + b = c$ nên ta không thể có hai số hữu tỷ cộng lại ra số vô tỷ. Mâu thuẫn. □

Phương pháp xác suất có ứng dụng rất hiệu quả trong việc chứng minh sự tồn tại của một cấu trúc. Sau đây chúng ta xem xét một số ví dụ như vậy: Ta biết rằng trong 6 người bất kỳ tồn tại ba người đôi một quen nhau hoặc ba người đôi một không quen nhau. Khi 6 được thay bởi 5 thì điều này không còn đúng nữa và ta có thể chứng tỏ điều này bằng cách chỉ ra phản ví dụ. Khi các con số là lớn, việc xây dựng phản ví dụ trở nên khó khăn. Trong những trường hợp như thế phương pháp xác suất tỏ ra hữu dụng.

Bài toán 7. *Chứng minh rằng giữa 2^{100} người, không nhất thiết phải có 200 người đôi một quen nhau hoặc 200 người đôi một không quen nhau.*

Lời giải. Ta sẽ cho một cặp hai người bất kỳ quen nhau hoặc không quen nhau bằng cách tung một đồng xu đối xứng. Trong một nhóm gồm 200 người, xác suất để họ đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau là $2 \cdot 2^{-C_{200}^2} = 2^{-19899}$.

Vì có $C_{2^{100}}^{200}$ cách chọn ra 200 người, xác suất tồn tại 200 người đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau nhiều nhất bằng

$$C_{2^{100}}^{200} \cdot 2^{-19899} < \frac{\left(2^{100}\right)^{200}}{200!} \cdot 2^{-19899} < 1.$$

Từ đây suy ra xác suất không tồn tại 200 người đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau lớn hơn 0. Nói cách khác, không nhất thiết phải có 200 người đôi một quen nhau hoặc 200 người đôi một không quen nhau. Bài toán được chứng minh. □

Ta thấy ở đây một phương pháp tổng quát để xây dựng ví dụ ngẫu nhiên: Nếu xác suất của tồn tại ví dụ ta cần là dương thì tồn tại ví dụ đó.

Bài toán 8. *Trong mỗi ô của bảng* 100×100*, ta viết một trong các số nguyên* $1, 2, \ldots, 5000$*. Hơn nữa, mỗi một số nguyên xuất hiện trong bảng đúng hai lần. Chứng minh rằng ta có thể chọn được* 100 *ô của bảng thỏa mãn ba điều kiện sau:*

(1) *Mỗi một hàng được chọn đúng một ô.*
(2) *Mỗi một cột được chọn đúng một ô.*
(3) *Các số trong các ô được chọn đôi một khác nhau.*

Lời giải. Chọn hoán vị ngẫu nhiên $(a_1, \ldots, a_{100})$ của $\{1, \ldots, 100\}$ và chọn ô thứ a_i trong hàng thứ i. Cách chọn như vậy thỏa mãn (1) và (2). Với mỗi $j = 1, 2, \ldots, 5000$, xác suất để chọn hai ô có cùng số j là 0 nếu hai ô này cùng hàng hoặc cùng cột và là $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{99}$ trong trường hợp ngược lại. Do đó xác suất để cách chọn này thỏa mãn (3) ít nhất là

$$1 - 5000 \cdot \frac{1}{100 \cdot 999} > 0$$

và ta có điều phải chứng minh. □

Tất nhiên, ta có thể dễ dàng chuyển hai lời giải xác suất nói trên sang lời giải chỉ sử dụng thuần túy phép đếm (bằng cách tính số các kết quả thuận lợi thay vì tính xác suất), mà thực chất sẽ hoàn toàn giống. Nhưng, theo chúng tôi, lời giải xác suất ngắn gọn và tự nhiên hơn.

Một tính chất mang tính đặc trưng của xác suất là đẳng thức

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1,$$

nếu $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ là một phân hoạch của không gian xác suất Ω.

Tính chất này có thể dùng để chứng minh nhiều đẳng thức tổ hợp bằng phương pháp xác suất. Ta bắt đầu bằng bài toán đơn giản sau:

Bài toán 9. *Cho* p, q *là các số thực dương sao cho* $p + q = 1$*. Chứng minh rằng*

$$p + pq + pq^2 + pq^3 + \cdots = 1.$$

Lời giải. Xét thí nghiệm tung đồng xu với xác suất ra mặt ngửa là p và mặt xấp là q. Ta thực hiện thí nghiệm cho đến khi ra được mặt ngửa. Gọi X là số lần tung, khi đó

$$P(X = n) = pq^{n-1}.$$

Vế trái của đẳng thức trên bằng $P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = n) + \cdots$ và dĩ nhiên là bằng 1. □

Bài toán 10 (IMO Shortlist, 2006)**.** *Cho* S *là tập hữu hạn các điểm trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Với mỗi một đa giác lồi* P *với các đỉnh thuộc* S*, gọi* $a(P)$ *là số các đỉnh của* P *và* $b(P)$ *là số các điểm của* S *nằm ngoài* P*. Chứng minh rằng với mọi số thực* x*, ta có đẳng thức*

$$\sum_P x^{a(P)}(1 - x)^{b(P)} = 1,$$

trong đó tổng được tính theo tất cả các đa giác lồi có đỉnh thuộc S*.* (*Chú ý quan trọng: đoạn thẳng, một điểm và tập rỗng được coi là đa giác lồi với* 2, 1 *và* 0 *đỉnh tương ứng.*)

Lời giải. Ta tô màu một cách ngẫu nhiên các điểm bằng màu đen và màu trắng, trong đó các điểm được tô màu đen với xác suất x. Với mỗi đa giác lồi P, gọi E_P là biến cố tất cả các đỉnh của P có màu đen và tất cả các điểm nằm ngoài P có màu trắng.

Các biến cố này đôi một xung khắc nhau, như thế vế trái là xác suất của sự kiện có một E_P nào đó đúng. Nhưng đây là sự kiện chắc chắn xảy ra: ta chỉ cần xét bao lồi của tất cả các điểm màu đen! □

Để tính xác suất của một biến cố theo định nghĩa cổ điển ta thường phải giải quyết hai bài toán tổ hợp: tính số các kết quả thuận lợi và tính số các kết quả có thể. Thông thường, bài toán sau đơn giản hơn bài toán trước. Điều này tạo ra một tình huống ứng dụng thú vị: Nếu ta tính được số kết quả có thể và xác suất thì sẽ tính được số kết quả thuận lợi.

Bài toán 11. *Trong số cách chọn ra ba đỉnh từ* 8 *đỉnh của hình lập phương đơn vị, có bao nhiêu cách chọn mà ba đỉnh được chọn là đỉnh của một tam giác đều?*

Bài toán này không khó, nhưng cũng khá rối. Ta giải bài này bằng cách tính xác xuất ba đỉnh được chọn ngẫu nhiên tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.

Lời giải. Ta lần lượt chọn các đỉnh:

- Đỉnh đầu tiên có thể là một đỉnh bất kỳ.
- Với đỉnh thứ hai, khi đỉnh thứ nhất đã được chọn thì ta chỉ có thể chọn một trong ba đỉnh có khoảng cách $\sqrt{2}$ đến đỉnh đầu. Xác suất thành công là $\frac{3}{7}$.
- Ở lượt cuối, xác suất thành công là $\frac{2}{6}$.

Như vậy xác suất để ba đỉnh được chọn là ba đỉnh của một tam giác đều sẽ là $\frac{1}{7}$. Vì số cách chọn ba đỉnh từ 8 đỉnh là C_8^3 nên số cách chọn thỏa mãn điều kiện 3 đỉnh được chọn là đỉnh của một tam giác đều sẽ bằng $\frac{1}{7}C_8^3 = 8$. ☐

Các ví dụ trên đây cho thấy phương pháp xác suất đôi khi mạnh hơn các phương pháp truyền thống. Ta kết thúc phần này bằng ví dụ sau, sử dụng một tính chất mang tính hiển nhiên của xác suất, đó là xác suất của một biến cố luôn nằm giữa 0 và 1.

Bài toán 12. *Trong một kỳ thi có* n *môn thi, trong đó có đề tiếng Pháp và đề tiếng Anh. Thí sinh có thể thi bao nhiêu môn tùy ý nhưng chỉ có thể chọn một trong hai ngôn ngữ cho mỗi môn thi. Với hai môn thi bất kỳ, tồn tại một thí sinh thi hai môn này bằng các ngôn ngữ khác nhau. Nếu mỗi một môn có nhiều nhất* 10 *thí sinh dự thi, hãy tìm giá trị lớn nhất có thể của* n.

Lời giải. Đáp số là 1024. Ví dụ sau đây cho thấy $n = 1024$ là có thể. Giả sử có 10 thí sinh (đánh số từ 1 đến 10) tham dự tất cả 1024 môn thi (đánh số từ 0 đến 1023). Với thí sinh i, môn thi thứ j sẽ được thi bằng tiếng Pháp nếu chữ số thứ i tính từ bên phải sang trong biểu diễn nhị phân của j là 0 và sẽ thi bằng tiếng Anh trong trường hợp ngược lại.

Bằng cách này dễ dàng kiểm tra được điều kiện được thỏa mãn. (Kết quả cũng như ví dụ có thể thu được không mấy khó khăn nếu ta thay 10 bằng một số nhỏ hơn và quan sát quy luật.)

Để chứng minh rằng 1024 là số lớn nhất, ta gán ngẫu nhiên cho các thí sinh là "người Pháp" hoặc "người Anh". Gọi E_j là biến cố "mọi thí sinh thi môn j đều thi bằng đề đúng với quốc tịch mình được gán". Vì có nhiều nhất 10 thí sinh ở mỗi môn, ta có xác suất $P(E_j) \geq 2^{-10}$. Vì với hai môn thi bất kỳ, tồn tại một thí sinh thi hai môn này bằng hai ngôn ngữ khác nhau, nên không có hai E_j nào có thể xảy ra đồng thời. Từ đây ta suy ra

$$P(\text{ít nhất một trong các } E_j \text{ xảy ra}) = P(E_1) + \cdots + P(E_n) \geq \frac{n}{1024}.$$

Nhưng vì xác suất của một biến cố bất kỳ không vượt quá 1 nên từ đây ta suy ra $1 \geq \frac{n}{1024}$, hay $n \leq 1024$. Đó chính là điều phải chứng minh. ☐

Bài tập.

1. Trong bảng $n \times n$ mỗi một trong các số $1, 2, \ldots, n$ xuất hiện đúng n lần. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một hàng hoặc một cột với ít nhất $\sqrt{n}$ số phân biệt.

2. (IMO Shortlist, 1999) Cho A là một tập hợp gồm n thặng dư modulo n^2. Chứng minh rằng tồn tại tập hợp B gồm n thặng dư modulo n^2 sao cho ít nhất một nửa thặng dư modulo n^2 có thể viết dưới dạng $a+b$ với $a \in A$ và $b \in B$.
3. Trong một giải cờ vua có 40 kỳ thủ. Có tổng cộng 80 ván đã được đấu, và hai kỳ thủ bất kỳ đấu với nhau nhiều nhất một lần. Với một số nguyên n, chứng minh rằng tồn tại n kỳ thủ chưa hề đấu với nhau. (Tất nhiên là số n càng lớn càng tốt.)
4. Cho $A_1, \ldots, A_n$ và $B_1, \ldots, B_n$ là các tập con hữu hạn khác nhau của $\mathbb{N}$ sao cho:
   (i) $A_i \cap B_i = \varnothing$ với mọi i;
   (ii) $(A_i \cap B_j) \cup (A_j \cap B_i) \neq 0$ với mọi $i \neq j$.
   Chứng minh rằng với mọi số thực p, $0 \leq p \leq 1$, ta có
   $$\sum_{i=1}^{n} p^{|A_i|}(1-p)^{|B_i|} \leq 1.$$
5. (Bay Area MO, 2004) Cho n số thực không đồng thời bằng 0 và có tổng bằng 0. Chứng minh rằng tồn tại một cách đánh số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ các số này sao cho
   $$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 < 0.$$
6. Cho p và q là các số không âm có tổng bằng 1 và m, n là các số nguyên không âm. Chứng minh rằng $(1-p^m)^n + (1-q^n)^m \geq 1$.
7. (Mỹ TST, 2001) Với tập hợp S, ký hiệu $|S|$ là số phần tử của S. Cho A là tập hợp các số nguyên dương với $|A| = 2001$. Chứng minh rằng tồn tại tập B sao cho:
   (1) $B \subseteq A$;
   (2) $|B| \geq 668$;
   (3) Với mọi u, $v \in B$ (không nhất thiết phân biệt), ta có $u + v \in B$.

(còn nữa)

Đố vui: Đây là ai?

Người trong ảnh bìa kỳ này là một chuyên gia nổi tiếng về hình học đại số. Ông là ai? Giải thưởng 300.000 đồng sẽ được Thông tin Toán học tặng cho độc giả gửi câu trả lời chính xác tên nhà toán học này cùng bài viết hay nhất, không quá 500 từ về ông. Tên người đoạt giải và bài viết sẽ được đăng trong số TTTH tiếp theo.

Câu trả lời và bài viết xin gửi về `ttth@vms.org.vn` *trước ngày 15/06/2013.*

Giải đố kỳ trước: *Người trong ảnh bìa của Tập 16 Số 4 là nhà toán học Thụy Điển Lars V. Hormander. Chúc mừng người nhận giải thưởng giải câu đố kỳ trước là Nguyễn Thị Tuyết Mai và Nguyễn Thị Quỳnh Trâm, trường Đại học Thương mại (xem bài trang 11).*

THÔNG BÁO

Để tránh lãng phí cũng như để tiết kiệm kinh phí của Hội Toán học Việt Nam, ban biên tập bản tin Thông tin Toán học chủ trương hạn chế việc gửi Thông tin Toán học ở dạng bản in. Các hội viên Hội Toán học có nhu cầu tiếp tục nhận bản in đề nghị gửi thư yêu cầu hoặc email về địa chỉ:

Ban biên tập **Thông tin Toán học**
Viện Toán học, 18 Hoàng Quốc Việt, 10307 Hà Nội
Email: `ttth@vms.org.vn`

trước ngày **30 tháng 6 năm 2013**.

Bản điện tử của bản tin Thông tin Toán học được tải miễn phí từ trang web của Hội Toán học tại địa chỉ: `http://www.vms.org.vn`

Kính mời quý vị và các bạn đồng nghiệp
đăng kí tham gia Hội Toán học Việt Nam

Hội Toán học Việt Nam được thành lập từ năm 1966. Mục đích của Hội là góp phần đẩy mạnh công tác giảng dạy, nghiên cứu, ứng dụng và phổ biến toán học. Tất cả những ai có tham gia giảng dạy, nghiên cứu, ứng dụng và phổ biến toán học đều có thể gia nhập Hội. Là hội viên, quý vị sẽ được phát miễn phí tạp chí Thông Tin Toán Học, được mua một số ấn phẩm toán với giá ưu đãi, được giảm hội nghị phí những hội nghị Hội tham gia tổ chức, được tham gia cũng như được thông báo đầy đủ về các hoạt động của Hội. Để gia nhập Hội lần đầu tiên hoặc để đăng kí lại hội viên (theo từng năm), quý vị chỉ việc điền và cắt gửi phiếu đăng ký dưới đây tới BCH Hội theo địa chỉ:

Chị Cao Ngọc Anh, Viện Toán Học, 18 Hoàng Quốc Việt, 10307 Hà Nội

Việc đóng hội phí có thể thực hiện theo một trong các hình thức sau đây:

1. Đóng tập thể theo cơ quan (kèm theo danh sách hội viên).
2. Đóng trực tiếp hoặc gửi tiền qua bưu điện đến chị Cao Ngọc Anh theo địa chỉ trên.

Thông tin về hội viên Hội Toán học Việt Nam cũng như tình hình đóng hội phí được cập nhật thường xuyên trên trang web của Hội.

BCH Hội Toán học Việt Nam

✄ ....

Hội Toán Học Việt Nam **Phiếu đăng kí hội viên**	**Hội phí năm 2013**
1. Họ và tên: .... *Khi đăng kí lại, quí vị chỉ cần điền ở những mục có thay đổi trong khung này.* 2. Nam ☐ Nữ ☐ 3. Ngày sinh: .... 4. Nơi sinh (*huyện, tỉnh*): .... 5. Học vị (*năm, nơi bảo vệ*): Cử nhân: .... Thạc sỹ: .... Tiến sỹ: .... TSKH: .... 6. Học hàm (*nơi được phong*): PGS: .... GS: .... 7. Chuyên ngành: .... 8. Nơi công tác: .... 9. Chức vụ hiện nay: .... 10. Địa chỉ liên hệ: .... Email: .... Điện thoại: .... Ngày: Kí tên:	Hội phí: 50 000 Đ ☐ Acta Math. Vietnam (*): 70 000 Đ ☐ Tổng cộng: .... Hình thức đóng: ☐ Đóng tập thể theo cơ quan *Tên cơ quan*: ☐ Đóng trực tiếp/thư phát nhanh ☐ Gửi bưu điện (*xin gửi kèm bản chụp thư chuyển tiền*) *Ghi chú:* - (*) Việc mua Acta Mathematica Vietnamica là tự nguyện và trên đây là giá ưu đãi (chỉ bằng 50% giá chính thức) cho hội viên (gồm 3 số, kể cả bưu phí). - Gạch chéo ô tương ứng.

THÔNG TIN TOÁN HỌC, Tập 17 Số 1 (2013)