Hội Toán Học Việt Nam

THÔNG TIN TOÁN HỌC

Tháng 9 Năm 2017 Tập 21 Số 3

Thông Tin Toán Học
(Lưu hành nội bộ)

- Địa chỉ liên hệ

Bản tin: ***Thông Tin Toán Học***
Viện Toán Học
18 Hoàng Quốc Việt, 10307 Hà Nội

Email: `ttth@vms.org.vn`

Trang web:
`http://www.vms.org.vn/ttth/ttth.htm`

Ảnh bìa 1. Nhà toán học Nga-Mỹ Vladimir Voevodsky (1966 - 2017). *Nguồn: Internet*

- Bản tin **Thông Tin Toán Học** nhằm mục đích phản ánh các sinh hoạt chuyên môn trong cộng đồng toán học Việt Nam và quốc tế. Bản tin ra thường kỳ 4 số trong một năm.

- Thể lệ gửi bài: Bài viết bằng tiếng Việt. Tất cả các bài, thông tin về sinh hoạt toán học ở các khoa (bộ môn) toán, về hướng nghiên cứu hoặc trao đổi về phương pháp nghiên cứu và giảng dạy đều được hoan nghênh. Bản tin cũng nhận đăng các bài giới thiệu tiềm năng khoa học của các cơ sở cũng như các bài giới thiệu các nhà toán học. Bài viết xin gửi về tòa soạn theo email hoặc địa chỉ ở trên. Nếu bài được đánh máy tính, xin gửi kèm theo file với phông chữ unicode.

Trang web của Hội Toán học:
`http://www.vms.org.vn`

Sơ lược về mối quan hệ giữa
Hội Toán học Pháp và Hội Toán học Việt Nam[1]

Lê Dũng Tráng
(Trung tâm Vật lý Lý thuyết Quốc tế ICTP)

Lịch sử về mối liên hệ giữa Toán học Pháp và Toán học Việt Nam bắt đầu từ thời kỳ Giáo sư Lê Văn Thiêm học tại Trường đại học Sư phạm ở Paris (Ecole Normale Supérieure - ENS). Đó là trong thời gian của Thế chiến thứ hai. Ông đã bảo vệ luận án tiến sĩ ở Göttingen (Đức) chỉ vài ngày trước khi thành phố rơi vào tay quân đội Mỹ.

Trong rất nhiều năm Việt Nam đã bị cô lập khỏi thế giới.

Vào năm 1966, Laurent Schwartz, Giáo sư tại Đại học Bách Khoa Paris (Ecole Polytechnique) và là chủ nhân huy chương Fields năm 1950, đã thành lập tổ chức "Ủy ban Pháp-Việt" (Comités France-Vietnam) rồi tham gia Tòa án Bertrand Russell vì tội ác chống nhân loại của người Mỹ tham chiến ở Việt Nam. Nhưng chỉ đến năm 1967 mới có nhà toán học đầu tiên đến Việt Nam, đó là Alexander Grothendieck, cũng là người được trao huy chương Fields (1964). Vào năm 1968, Laurent Schwartz cũng đã đến Việt Nam, nhưng với tư cách là thành viên của Tòa án Bertrand Russell nhiều hơn là với tư cách của một nhà toán học. Năm 1969, Laurent Schwartz đã sắp xếp cho Giáo sư Nguyễn Đình Trí, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, đến Nhật Bản từ Việt Nam để tham dự một hội nghị toán học. Năm 1970, một học trò cũ của Laurent Schwartz là André Martineau cũng đến Việt Nam (đáng tiếc là ông đã mất vào năm 1972). Giáo sư Bùi Trọng Liễu, một nhà toán học người Việt sống ở Pháp, cũng đã về Việt Nam vào năm 1970. Ông đã sắp xếp chuyến thăm của tôi vào năm 1972. Cho đến lúc đó, gần như không có nhà toán học nào đến Việt Nam. Một trong những lý do chính là Việt Nam liên tục có chiến tranh trong giai đoạn 1945 - 1975.

Hội nghị kỷ niệm GS. Lê Dũng Tráng tròn 60 tuổi ở Mexico (2007). *Nguồn: Internet*

Mặc cho mối an nguy của cuộc chiến, có một người đã luôn đứng về phía Giáo

[1] "Short account of the SMF and VMS relations". Phát biểu tại Hội nghị Toán học phối hợp Việt - Pháp năm 2012 tại Huế

sư Lê Văn Thiêm để phát triển toán học ở Việt Nam là Bộ trưởng Tạ Quang Bửu, một du học sinh ở Pháp trước Thế chiến thứ hai. Ông nói với tôi rằng đáng ra ông học tại Sorbonne, nhưng để gây khó cho các thầy Pháp, ông đã quyết định thi đỗ một chứng chỉ tự do để nghiên cứu một chút môn toán, vật lý, văn học, tiếng Anh. Bằng cách đó ông đã hiểu được giá trị của khoa học và ý nghĩa của toán học. Có thời kỳ ông là thư ký riêng của Chủ tịch Hồ Chí Minh, sau đó ông cũng từng là Thứ trưởng Bộ Quốc phòng. Năm 1954, ông đã tham gia ký Thỏa ước Hòa bình Geneva sau chiến dịch Điện Biên Phủ. Khi tôi gặp ông, ông đang là Bộ trưởng Bộ Giáo dục Đại học. Trong chính phủ Việt Nam, ông là người hiểu tiềm năng của toán học ở Việt Nam.

Trong những ngày đó, không một chính trị gia nào trên thế giới biết được Grothendieck sẽ là một nhà toán học như thế nào. Điều đáng ngạc nhiên là Bộ trưởng Tạ Quang Bửu biết về Grothendieck và về toán học của ông. Ông tổ chức các chuyến đi cho Grothendieck, mặc dù các vụ đánh bom rất khốc liệt và các trường đại học đã phải sơ tán các lớp học đến các vùng núi phía bắc Hà Nội. Sau đó Tạ Quang Bửu đã giúp tôi cùng với Bernard Malgrange, Alain Chenciner và Frédéric Phạm tổ chức một lớp học vào tháng 10 năm 1974. Nhân dịp này, ông đã viết một bài báo dài về lý thuyết thảm họa trên tờ Nhân Dân. Ông hoan nghênh chuyến thăm của Yvette Amice, từng là chủ tịch của Hội Toán học Pháp; Jean-Louis Verdier, cũng là một cựu chủ tịch của Hội Toán học Pháp; Pierre Cartier, người sau đó đã đến thăm Việt Nam một số lần. Liên quan đến Nhật Bản, ông cũng đã tổ chức chuyến thăm của Kyoji Saito, một trong những người bạn Nhật Bản thân nhất của tôi vào thời kỳ đó.

Ngày nay tất thảy những điều này dường như là những việc dễ dàng. Những người trẻ tuổi phải hiểu rằng, cho đến cuối những năm 1980, Việt Nam là một trong những nước nghèo nhất trên thế giới. Khi tôi đến vào năm 1972, Viện Toán học Việt Nam chỉ có ba người, là Giáo sư Lê Văn Thiêm, Giáo sư Hoàng Tụy và Giáo sư Phan Đình Diệu. Viện Toán học là một phòng nhỏ nằm trong Uỷ ban Khoa học Nhà nước tại Hà Nội. Các seminar được tổ chức tại một trong những trường đại học ở Hà Nội. Xin Visa là một cuộc chiến liên tục với các nhà chức trách. Đến Hà Nội bằng máy bay hoặc tàu lửa rất khó. Tôi không nhớ là Malgrange, Chenciner hay Frédéric Phạm đã phải qua Băng Cốc hay Viên Chăn. Cá nhân tôi đến bằng tàu hỏa vào năm 1972 và những năm tiếp theo tôi thì đi bằng máy bay cánh quạt qua Moscow hoặc Berlin, mất đến 37 giờ.

Bất cứ điều gì bây giờ trông có vẻ hiển nhiên hay dễ dàng thì đã vô cùng khó khăn vào thời điểm đó. Để sắp xếp thời gian giữa việc xin thị thực, đón các nhà toán học, đặt phòng khách sạn, sự không thích hợp của đối tượng, phòng thuyết trình, đi lại, tham quan, tất cả những điều này là một chuỗi các khó khăn không hồi kết. Tôi nhớ có một điều đã giấu Grothendieck là sau chuyến thăm của ông (ông giảng dạy khoảng 70 giờ trong ba tuần ở vùng núi) thư viện toán học bị mất hơn một trăm cuốn sách trong một trận lụt.

Vâng, những kỷ niệm vẫn chảy trong đầu tôi và tôi có thể nói không ngừng nghỉ về những năm tháng đó. Tôi quyết định kể về những điều đó ngày hôm nay chỉ để thế hệ trẻ không quên tất cả những nỗ lực phát triển toán học ở Việt Nam và nhớ những cái tên như Lê Văn Thiêm, Tạ Quang Bửu.

Để kết thúc bài nói của mình, tôi muốn kể cho các bạn một ví dụ sinh động mà tôi có trong những lần đầu tiên này.

Đó là trong những ngày của chuyến thăm đầu tiên của tôi vào năm 1972. Trong những ngày đó, GS. Trần Quỳnh là Trưởng ban Khoa học Nhà nước, ông không thực sự là một nhà khoa học, nhưng ông là người thực tế và muốn có những lý do tốt để phát triển mối quan hệ với thế giới bên ngoài. Tôi đã có một cuộc họp riêng với ông trong suốt nửa giờ, rồi ông đột ngột hỏi tôi: "Tráng, anh muốn làm gì ở Việt Nam?". Tôi không biết phải trả lời thế nào, vì tôi không chuẩn bị những câu trả lời ngoại giao nên làm cho phải phép. Tôi phải chứng tỏ rằng tôi không ngại. Tôi nhớ rằng toàn bộ não của tôi đã tập trung để đưa ra một câu trả lời thích hợp. Sau đó tôi nói: "Tôi muốn rằng Việt Nam trong 25 năm nữa sẽ có người nhận Huy chương Fields, giải thưởng mà các nhà toán học coi là giải Nobel của mình". Rất tiếc là tôi đã bị sai đến 13 năm!

Người dịch: **Trịnh Thanh Đèo**
(Trường đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

Ký kết thỏa thuận thành lập
Các trung tâm UNESCO dạng hai về đào tạo và nghiên cứu Toán học và Vật lý[(1)]

Phùng Hồ Hải
(Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam)

Ngày 24/8/2017, tại trụ sở Bộ Khoa học và Công nghệ, Bộ trưởng Bộ KH&CN Chu Ngọc Anh, thay mặt Chính phủ Việt Nam, và bà I. Bokova, Tổng giám đốc Tổ chức Giáo dục, Khoa học và Văn hóa của Liên hiệp quốc (UNESCO), đã ký các thỏa thuận thành lập Trung tâm quốc tế đào tạo và nghiên cứu Toán học và Trung tâm Vật lý quốc tế. Đây là hai trung tâm nghiên cứu và đào tạo trình độ trên đại học các lĩnh vực Toán học và Vật lý, trực thuộc Viện Hàn lâm Khoa học & Công nghệ Việt Nam và hoạt động dưới sự bảo trợ của UNESCO (như là các trung tâm dạng 2). Như vậy Việt Nam sẽ trở thành một trong bốn nước ASEAN có trung tâm UNESCO dạng 2.

Theo nội dung của Thỏa thuận, Chính phủ Việt Nam cam kết thành lập trong năm 2018 tại Viện Hàn lâm Khoa học

(1) Bản tin Khoa học và Công nghệ. Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam. Số 32 (Tháng 8/2017).

và Công nghệ hai trung tâm UNESCO về Toán học và Vật lý, dựa trên các cơ sở nhân lực và vật chất của Viện Toán học và Viện Vật lý. Chính phủ Việt Nam cũng cam kết cung cấp tất cả các nguồn lực, tài chính, hiện vật cần thiết cho việc quản lý và hoạt động hiệu quả của hai trung tâm. Các trung tâm này có Ban điều hành gồm đại diện từ phía UNESCO và Việt Nam (bao gồm Bộ KH&CN, Viện HLKHCN VN, Viện Toán học và Viện Vật lý). Các trung tâm hoạt động độc lập, được cấp kinh phí từ phía Việt Nam và được UNESCO công nhận và bảo trợ, được sử dụng logo của UNESCO trên các tài liệu, văn bản, trang web của mình.

Các trung tâm UNESCO Dạng hai là những trung tâm nghiên cứu và đào tạo trong các lĩnh vực khoa học tự nhiên và xã hội với các mục tiêu phù hợp với các chương trình chiến lược của UNESCO. Các trung tâm này hoạt động độc lập với UNESCO nhưng được UNESCO công nhận và bảo trợ. Hiện nay trên thế giới có khoảng 100 trung tâm UNESCO dạng 2.

Việc ký kết thành tập hai trung tâm UNESCO tại Việt Nam chứng tỏ sự công nhận của thế giới về năng lực nghiên cứu và đào tạo của các nhà khoa học Việt Nam trong các lĩnh vực Toán học và Vật lý. Việc ký kết Thỏa thuận này không những giúp Việt Nam tăng cường hợp tác với các nước trong khu vực ASEAN và châu Á mà còn với các nước phát triển và đang phát triển khác thông qua mạng lưới của UNESCO, giúp Việt Nam nâng cao vị thế trong khoa học đối với khu vực và quốc tế. Việc ký Thỏa thuận cũng thể hiện trách nhiệm của Việt Nam đối với sự phát triển của khoa học cơ bản trong khu vực và thế giới. Hai trung tâm UNESCO tại Việt Nam sẽ tạo một tiền đề thuận lợi để Việt Nam có ảnh hưởng tốt đối với khu vực qua cộng đồng nghiên cứu khoa học và đào tạo. Với Trung tâm UNESCO, Việt Nam sẽ thu hút học viên cao học, nghiên cứu sinh trong khu vực. Tốt nghiệp xong trở về nước, những cựu học sinh đó sẽ đóng vai trò quan trọng ở nhiều lĩnh vực trong các nước ASEAN, và qua đó dần tạo được tầm ảnh hưởng của Việt Nam.

Bộ trưởng Khoa học Công nghệ Chu Ngọc Anh và Tổng giám đốc UNESCO Irina Bokova ký thỏa thuận hợp tác. *Nguồn: Viện HLKHCNVN*

Thông qua hoạt động của hai Trung tâm, học viên Việt Nam và khu vực có cơ hội được tiếp xúc với các nhà khoa học có uy tín trên thế giới, để bổ túc kiến thức cũng như tìm hiểu những hướng nghiên cứu khoa học tiến tới thực hiện luận án thạc sỹ, tiến sỹ dưới sự hướng dẫn, đồng hướng dẫn của nhà khoa học Việt Nam và các đồng nghiệp quốc tế. Thông qua hoạt động của Trung tâm, Việt Nam có cơ hội mời các nhà khoa học là người Việt Nam ở nước ngoài về làm việc và giảng dạy tại Việt Nam để đóng góp cho đất nước và mời các nhà khoa học uy tín đến làm việc tại Việt Nam. Ngoài ra, với tư cách Trung tâm khoa học quốc tế, Việt Nam có thể khai thác được các nguồn lực tài chính ngoài ngân sách cho hoạt động khoa học từ các tổ chức khoa học quốc tế như ICTP, CIMPA... và các dự án, chương trình nghiên cứu khoa học quốc tế khác.

Việc thành lập hai Trung tâm dựa trên năng lực, cán bộ và cơ sở vật chất của Viện Toán học và Viện Vật lý, cơ cấu tổ chức của trung tâm hết sức gọn nhẹ, không cần bổ sung biên chế mới, không cần xây dựng năng lực, đầu tư phát triển từ đầu. Hai Viện Toán học và Viện Vật lý sẽ cử cán bộ làm kiêm nhiệm. Trên cơ sở của Thỏa thuận vừa ký, chúng ta hy vọng hai trung tâm sẽ nhanh chóng được thành lập và đi vào hoạt động một cách hiệu quả, đóng góp một cách hữu hiệu và các mục tiêu của hai Chương trình quốc gia phát triển Toán học và Vật lý.

MARYAM MIRZAKHANI (1977-2017)

Nguyễn Đức Mạnh
(Đại học Bordeaux, CH Pháp)

Ngày 14 tháng 7 năm 2017, một ngôi sao sáng đã tắt trên bầu trời Toán học thế giới, ngôi sao ấy mang tên Maryam Mirzakhani, người phụ nữ đầu tiên và duy nhất cho đến thời điểm này vinh dự được nhận huy chương Fields cao quý. Dẫu rằng thông tin sức khỏe của chị không được tốt không phải là mới, sự ra đi quá đột ngột của chị ở tuổi 40 đã khiến không ít đồng nghiệp, trong đó có người viết, và nhiều người yêu Toán không khỏi bàng hoàng. Mong rằng bài viết này có thể mang lại cho độc giả thêm chút ít thông tin về con người và những đóng góp mang dấu ấn của chị cho Toán học.

Maryam Mirzakhani sinh ngày 5 tháng 5 năm 1977 tại Tê-hê-ran, nước Cộng hòa Hồi giáo Iran. Chị có ước mơ trở thành nhà văn, nhưng tình yêu dành cho Toán của chị cuối cùng đã vượt lên trên ước mơ ấy. Lúc còn là học sinh phổ thông Maryam đã gây tiếng vang lớn khi hai lần liên tiếp đoạt huy chương vàng ở kỳ thi Olympic Toán Quốc Tế vào các năm 1994, 1995, trong đó lần thứ hai với số điểm tuyệt đối. Đây là thành tích tốt nhất của một học sinh trong đội tuyển Iran từ trước đến nay. Sau khi tốt nghiệp cao học tại Đại học Sherif Tê-hê-ran, năm 1999 chị đến Đại học Harvard, Hoa Kỳ, để làm luận án tiến sỹ dưới sự hướng dẫn của GS. Curtis McMullen, người đã nhận huy chương Fields vào năm 1998.

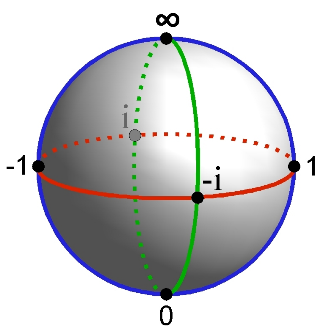
Nhà toán học Maryam Mirzakhani.
Nguồn: Internet

Ở Harvard chị nổi tiếng bởi sự quyết tâm và những câu hỏi không ngừng nghỉ, bất chấp những rào cản ngôn ngữ. Mirzakhani nhận bằng tiến sỹ năm 2004. Tờ Tin tức Stanford (Stanford News) đã gọi luận văn tiến sỹ của chị là một kiệt tác. Giáo sư Benson Farb, Đại học Chicago, Hoa Kỳ, một trong những chuyên gia hàng đầu thế giới về Hình học Tô-pô, nói rằng "phần lớn các nhà toán học sẽ không thể nào có được một công trình tốt như thế trong cả sự nghiệp... Và cô ấy (Mirzakhani) đã làm được điều đó ngay trong luận án tiến sỹ của mình". Còn GS. Curtis McMullen, người thầy hướng dẫn luận án, thì miêu tả Mirzakhani như một người không biết sợ hãi trước những tham vọng (fearless ambition).

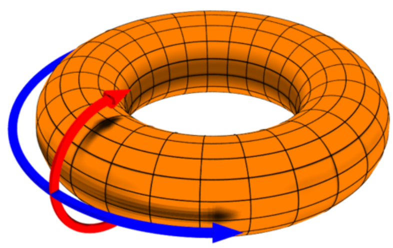
Sau khi hoàn thành luận án tiến sỹ, Mirzakhani đến làm việc tại Đại học Princeton với tư cách giáo sư dự khuyết (assistant professor) và được nhận tài trợ nghiên cứu từ Viện Toán học Clay. Từ năm 2009, chị trở thành giáo sư tại Đại học Stanford.

Lĩnh vực nghiên cứu chính của Mirzakhani là lý thuyết Teichmüller, không gian moduli của các diện Riemann, và hệ động lực trên các không gian này. Để giải quyết những bài toán hóc búa trong lĩnh vực này phải cần đến các kết quả từ nhiều lĩnh vực khác như hình học hyperbolic, giải tích phức, hình học tô pô với số chiều thấp, hệ động lực chỉnh hình,... Không những am hiểu và nắm vững các công cụ trong những lĩnh vực nói trên, Mirzakhani còn có nhiều đóng góp tạo ra những chiếc cầu nối quan trọng giữa chúng.

Diện Riemann là các đa tạp giải tích phức 1 chiều. Ví dụ đầu tiên về diện Riemann compact có thể kể đến là mặt cầu Riemann, đa tạp được xây dựng bằng cách thêm một điểm (vô cùng) vào mặt phẳng phức cùng với một cấu trúc tô pô phù hợp. Tiếp đến là các hình xuyến - không gian thương của mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ dưới tác động của các lưới đẳng cấu với $\mathbb{Z}^2$ (lattices). Các đa tạp này cũng xuất hiện một cách tự nhiên khi ta tìm nghiệm của một số đa thức hai biến trên trường phức $\mathbb{C}$.



Mặt cầu Riemann. *Nguồn: wikipedia*



Hình xuyến. *Nguồn: wikipedia*

Diện Riemann cũng có thể được hiểu như một đa tạp tô pô 2 chiều được trang bị một cấu trúc chỉnh hình. Gắn liền với mỗi đa tạp tô pô 2 chiều là hai chỉ số: giống (genus) và đặc trưng Euler (Euler characteristic) của nó. Giống của một đa tạp 2 chiều là một số nguyên không âm. Mặt cầu có giống bằng 0, còn hình xuyến có giống bằng 1. Để có một mặt 2 chiều có giống bằng g ta chỉ việc gắn thêm g chiếc quai vào mặt cầu. Giống và chỉ số Euler được liên hệ bởi công thức:

$$\text{chỉ số Euler} = 2 \text{ - } 2\times \text{ giống.}$$

Từ lâu người ta đã biết rằng hai mặt tô pô compact *định hướng được* có cùng chỉ số Euler là đồng phôi. Nói cách khác, cho trước một chỉ số Euler χ chẵn, nhỏ hơn hoặc bằng 2, mọi mặt tô pô compact định hướng được có chỉ số Euler χ đều đồng phôi với một mặt tô pô cố định.

Mặt có giống bằng 2. *Nguồn: wikipedia*

Không khó để thấy rằng tồn tại nhiều diện Riemann có cùng chỉ số Euler, chẳng hạn khi ta xét các đường cong elliptic định nghĩa bằng các phương trình có dạng $y^2 = x^3 + ax + b$, với a, b là các tham số có thể thay đổi. Điều này có nghĩa là trên cùng một mặt tô pô compact *định hướng được* có thể có nhiều cấu trúc chỉnh hình khác nhau. Không gian moduli và không gian Teichmüller được xây dựng để tìm hiểu tập hợp các diện Riemann có cùng chỉ số Euler và các mối liên hệ giữa chúng. Không gian này cũng rất hữu ích cho việc nghiên cứu tập hợp nghiệm của các họ đa thức phụ thuộc một hoặc nhiều tham số.

Với mỗi số nguyên không âm g, không gian moduli của các diện Riemann compact có giống bằng g thường được ký hiệu bởi $\mathcal{M}_g$. Theo định nghĩa, tồn tại một tương ứng 1-1 giữa không gian này và tập hợp các diện Riemann có giống g. Không gian $\mathcal{M}_g$ vừa có cấu trúc của một đa tạp đại số phức (complex projective/algebraic variety), vừa mang cấu trúc của một đa tạp **symplectic**. Không gian Teichmüller có thể được hiểu là phủ phổ dụng (universal cover) của $\mathcal{M}_g$.

Không gian $\mathcal{M}_g$ cũng có thể được định nghĩa thông qua các mặt hyperbolic. Mặt hyperbolic là các đa tạp 2 chiều được trang bị một mêtric Riemann có độ cong thiết diện không đổi và bằng -1. Mọi điểm trên một mặt hyperbolic đều có một lân cận đẳng cự với một tập con mở của nửa mặt phẳng trên với mêtric $\frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$.

Nhờ một định lý cổ điển của giải tích phức (Uniformization Theorem), ta biết rằng có một tương ứng 1-1 giữa tập hợp các diện Riemann compact có giống $g \geq 2$ và tập hợp các mặt hyperbolic compact có cùng giống. Vì thế $\mathcal{M}_g$ cũng được xem như là không gian moduli của các mặt hyperbolic.

Không gian $\mathcal{M}_g$ đã được biết đến bởi Riemann, nhưng phải đến thập kỷ 60 của thế kỷ trước nó mới được xây dựng một cách chặt chẽ từ hai cách tiếp cận khác nhau, Ahlfors và Bers xây dựng $\mathcal{M}_g$ bằng các công cụ của giải tích phức, còn Mumford xây dựng $\mathcal{M}_g$ bằng các công cụ đại số. Ngày nay không gian moduli là điểm giao thoa của nhiều lĩnh vực Toán học khác nhau, trải dài từ Hình học Số học (arithmetic geometry) cho đến Lý thuyết Dây (string theory).

Công trình đầu tay của Mirzakhani liên quan đến bài toán đếm số đường trắc địa đóng (closed geodesic) trên một mặt hyperbolic compact. Cho trước một mặt hyperbolic compact X. Với mỗi $L \in (0, +\infty)$ ta dùng ký hiệu $\pi(X, L)$ để chỉ số đường trắc địa đóng trên X có chiều dài không vượt quá L. Từ những năm 1940, Delsarte, Huber và Selberg đã chứng minh rằng

$$\pi(X, L) \sim \frac{e^L}{L},$$

khi L tiến đến vô cùng. Tuy nhiên nếu ta quan tâm đến số các đường trắc địa đơn đóng (không tự cắt) $\sigma(X, L)$ thì câu chuyện trở nên rất khác. Trong bài báo [8], Mirzakhani đã chứng minh rằng

$$\sigma(X, L) \sim C_X L^{6g-6}.$$

So sánh hai công thức ta thấy rằng ngoài việc có hai hàm số có độ tăng khác nhau thì trong trường hợp của $\pi(X, L)$ hằng số tiệm cận (asymptotic constant) không phụ thuộc X, trong khi đó với $\sigma(X, L)$ thì hằng số này lại phụ thuộc X. Mặc dù phát biểu của kết quả của Mirzakhani chỉ liên quan đến một mặt hyperbolic cố định, chứng minh của kết quả này dùng đến tích phân trên không gian moduli, và nhờ đó đã đưa Mirzakhani đến một loạt kết quả quan trọng khác, trong đó có một chứng minh mới, đầy bất ngờ, cho một giả thuyết được nêu ra bởi Witten (giả thuyết này trước đó đã được chứng minh bởi Kontsevich). Cốt lõi trong chứng minh của Mirzakhani là một cách tính mới bằng phương pháp truy hồi cho thể tích các không gian moduli của các mặt hyperbolic với biên trắc địa (xem [6, 7, 8]).

Một hướng nghiên cứu quan trọng khác trong các công trình của Mirzakhani là hệ động lực trên các không gian moduli, mà cụ thể hơn là hệ động lực của các đường trắc địa phức. Từ các kết quả cổ điển về không gian Teichmüller, người ta biết rằng mọi véc tơ tiếp xúc của không gian moduli cảm sinh một đường trắc địa phức. Đường trắc địa này là ảnh của nửa mặt phẳng trên Poincaré trong không gian moduli qua một phép đẳng cự địa phương chỉnh hình. Kể từ giữa thập niên 80, nghiên cứu bao đóng của các đường trắc địa này đã trở thành một đề tài hấp dẫn do các mối liên hệ giữa chúng với nhiều lĩnh vực khác. Nhiều tên tuổi lớn của toán học thế giới như Kontsevich, McMullen, Yoccoz,... đã có những công trình đóng góp vào sự phát triển theo hướng này.

Trong một hệ động lực dưới tác động của một nhóm, thông thường bao đóng của một quỹ đạo bất kỳ không có nhiều tính chất hình học đáng chú ý. Tuy nhiên, trong trường hợp của các đường trắc địa phức trong không gian moduli, tất cả các ví dụ và các trường hợp cá biệt được tìm thấy luôn chỉ ra rằng bao đóng của một đường trắc địa như vậy luôn là một đa tạp đại số con của không gian moduli với nhiều tính chất đặc biệt. Điều này trùng hợp với các kết quả của Ratner về hệ động lực của các nhóm lũy đơn (unipotent) trên các không gian thuần nhất. Từ đầu những năm 2000, người ta đã đặt câu hỏi liệu những trùng hợp này chỉ là ngẫu nhiên hay có một nguyên nhân sâu xa nào khác. Các kết quả của McMullen [4] cho trường hợp các mặt có giống bằng 2 là những bằng chứng củng cố cho giả thuyết thứ hai. Điều này cuối cùng cũng đã được làm sáng tỏ thông qua các công trình của Eskin-Mirzakhani [1], Eskin-Mirzakhani-Mohammadi [2], Filip [3]. Hệ quả quan trọng của các công trình này có thể được tóm gọn trong phát biểu sau:

Bao đóng của bất kỳ đường trắc địa phức nào cũng là một đa tạp đại số con của không gian moduli.

Xuất phát điểm của kết quả này là công trình đồ sộ (hơn 200 trang) [1], thành quả của nhiều năm làm việc không ngừng nghỉ của Eskin và Mirzakhani. Đây có thể nói là một trong những thành tựu ấn tượng nhất trong sự nghiệp của Mirzakhani. Không chỉ mang ý nghĩa về mặt lý thuyết, công trình này (cùng với [2]) còn có những ứng dụng cực kỳ hữu ích trong việc nghiên cứu một số vấn đề vật lý liên quan đến chuyển động bi-a. Không dừng lại ở đây, bất chấp những vấn đề sức khỏe, những năm gần đây Mirzakhani vẫn tiếp tục nghiên cứu sâu về vấn đề này và đã thu được nhiều kết quả quan trọng [9, 10].

Tháng 8 năm 2014, tại Seoul, Mirzakhani trở thành người phụ nữ đầu tiên được nhận huy chương Fields, giải thưởng cao quý dành cho các nhà Toán học trẻ dưới 40 tuổi. "Đây là vinh dự lớn lao, và tôi sẽ rất hạnh phúc nếu như điều đó trở thành nguồn động viên cho các nhà khoa học và các nhà toán học nữ. Tôi tin chắc rằng trong số họ sẽ có nhiều người đạt được những giải thưởng như thế này trong tương lai không xa." Chị đã nói như thế sau khi nhận giải.

Mirzakhani tự gọi mình là một nhà toán học “chậm chạp" (slow researcher), còn đồng nghiệp thì nói chị là người tham vọng, có ý chí quyết tâm sắt đá, và không hề e ngại phải đối mặt với những vấn đề hóc búa khiến nhiều người chùn bước. Trong nghiên cứu chị thường chọn những con đường chông gai hơn là những con đường bằng phẳng dễ đi. Đã có lần chị nói với một phóng viên "Bạn phải tốn nhiều công sức và nỗ lực mới thấy được vẻ đẹp của Toán học". Trong một lần phỏng vấn khác, chị nói “Tôi chẳng có công thức nào để tìm ra các chứng minh... Nó cũng giống như việc bị lạc trong rừng rậm, bạn phải vận dụng tất cả những gì bạn biết để tìm ra điều gì đó mới, và nếu may mắn bạn sẽ tìm được lối ra".

Mirzakhani cùng con gái Anahita sau khi nhận giải thưởng Clay từ Landon Clay (trái) tại Hội nghị Clay năm 2015 ở Oxford. *Nguồn: Internet*

Mirzakhani được phát hiện ung thư vú năm 2013, năm 2016 bệnh di căn sang gan và xương, chị qua đời ngày 14 tháng 7 năm 2017 ở tuổi 40 tại bệnh viện Stanford. “Cô ấy ra đi quá sớm, nhưng ảnh hưởng của cô ấy sẽ còn mãi thông qua hàng nghìn phụ nữ mà cô ấy đã khích lệ đi theo con đường nghiên cứu khoa học và toán học", ông Marc Tessier-Lavigne, hiệu trưởng trường Đại học Stanford, nói. Còn theo lời GS. Ralf Cohen, Đại học Stanford, thì “Maryam là một đồng nghiệp tuyệt vời. Cô không chỉ là một nhà nghiên cứu tài ba và quả cảm mà còn là một giáo viên và người hướng dẫn luận văn xuất sắc. Cô chính là hình mẫu của một nhà toán học và nhà khoa học điển hình: luôn tìm cách giải quyết các vấn đề chưa được giải quyết, hoặc tìm hiểu những điều chưa được giải thích. Điều này được thôi thúc bởi óc tò mò (intellectual curiosity), và bởi niềm vui cũng như sự thích thú mà những bước tiến dù là nhỏ nhất mang lại."

Mirzakhani không phải là người dễ dàng đầu hàng trước số phận, “đôi khi bạn sẽ phải giày vò chính mình, nhưng cuộc sống vốn là thế, không phải lúc nào cũng dễ dàng", chị nói. Và bệnh tật hiểm nghèo cũng không thể làm vơi đi niềm đam mê của chị cho Toán học, một ngày trước khi qua đời chị đã viết: “càng làm toán, tôi càng cảm thấy hạnh phúc".

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. Eskin and M. Mirzakhani: Invariant and stationary measures for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ action on moduli space, arXiv:1302.3320 (2013).

[2] A. Eskin, M. Mirzakhani, and A. Mohammadi: Isolation, Equidistribution, and Orbit Closures for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ action on Moduli space, *Annals of Math.* **182** (2015), no.2, pp. 673–721.

[3] S. Filip: Splitting mixed Hodge structures over affine invariant manifolds, *Annals of Math.* **183** (2016), no.2, pp. 681-713.

[4] C. McMullen: Dynamics of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ over moduli space in genus two, *Ann. of Math.* **165** No.2, 397-456 (2007).

[5] C. McMullen: The mathematical work of Maryam Mirzakhani, at http://www.math.harvard.edu/~ctm/papers/home/text/papers/icm14/icm14.pdf

[6] M. Mirzakhani: Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces. *Invent. Math.* **167** (2007), 179–222.

[7] M. Mirzakhani: Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli spaces of curves. *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), 1–23.

[8] M. Mirzakhani: Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces. *Ann. Math.* **168** (2008), 97–125.

[9] M. Mirzakhani and A. Wright: The boundary of an invariant submanifold, arxiv:1508.01446 (2015)(to appear in *Invent. Math.*).

[10] M. Mirzakhani and A. Wright: Full rank affine invariant submanifolds, arxiv:1608.02147 (2016) (to appear in *Duke Math. J.*)

[11] http://news.stanford.edu/2017/07/15/maryam-mirzakhani-stanford-mathematician-and-fields-medal-winner-dies.

Kẻ thất bại và kẻ siêu thất bại

Stefan Scholl (MK)

Cả nước nhạo cười
Perelman, đồ ngốc
Thôi đừng cố chấp
Nhận lấy tiền đi

Trích thơ trên mạng Internet về Grigory Perelman

Cách đây không lâu tôi có nhìn thấy Perelman. Khi đang ngồi trong quán café “Chaynikoff” tại Kupchino và ngắm phố qua khung cửa sổ thì thấy ông xuất hiện. Perelman đi vội vã. Người đàn ông dáng cao, xanh xao, đầu hói với bộ râu bay lất phất và chiếc túi nhựa trong tay. Tôi không nhìn rõ những móng tay dài huyền thoại của ông.

Tôi trả tiền, bước vội ra khỏi quán và chỉ kịp nhìn thấy ông phía sau lưng và chiếc áo vét nhàu nhĩ. Perelman bước những bước dài, vượt ngã tư và đột nhiên biến mất như thể con đường nhựa ẩm ướt đã nuốt mất ông, hay ông biến vào ảo ảnh của chính mình.

Không phải ma nhưng Grigory Perelman thực sự đã trở thành nhân vật của Gogol: "Perelman ngu ngốc". Một trong những nhà toán học thiên tài của đương đại đang bước đi trong khu dân cư của Piter (St. Peterburg-ND) với một tấm áo vét nhàu nát và cái túi nhựa trong tay. Với những người như vậy tiếng Nga vĩ đại đã tìm cho một từ mới: "kẻ thất bại".

Grigori Perelman trên đường phố St. Peterburg.
Nguồn: Internet

Perelman phạm hai sai lầm lớn mà cả nước Nga lẫn nhân loại không thể tha thứ. Sai lầm thứ nhất là ông đã chứng minh được Giả thuyết Poincaré, bài toán mà các nhà toán học trên thế giới tìm mãi không ra lời giải. Sai lầm thứ hai còn tồi tệ hơn: ông từ chối nhận số tiền một triệu đô la được trao từ quỹ của Mỹ cho người giải được "bài toán thiên nhiên kỉ".

Vấn đề không phải là người ta không hiểu và ghét Perelman, không nằm ở chỗ các ống kính truyền hình luôn bám trực ông như theo bám người tuyết vừa trốn khỏi sở thú, hay việc Masha Gessen, nhà báo có tiếng của giới báo chí tự do Max-cơ-va, đã say mê xứng tầm với nền báo chí lá cải Anh trong việc mô tả cái mùi khó ngửi của tấm đệm mà Perelman từng ngủ. Và vấn đề cũng không phải là việc ông đã dùng đôi giày lạc mốt của mình đạp lên đồng tiền - cái giá trị tối thượng của không gian hậu Xô Viết.

Vấn đề nằm ở chỗ Grigory Perelman chính là gương mặt đại diện cho số phận của nền khoa học Nga đương đại. Ông đã thành biểu tượng của cả một thế hệ các nhà khoa học trưởng thành từ nhà trường Xô Viết, những người mà sau đó phương Tây tìm cách thu hút, mời chào nhưng họ quyết trung thành với Tổ quốc. Nhưng ngược lại, Tổ quốc đã không quan tâm đến họ, những đứa con của mình, cả tài năng lẫn sự trung thành.

Đầu những năm 90, nhà toán học trẻ Perelman đã từng sống một số năm ở Mỹ, nơi mà tài năng của ông được đánh giá tại nhiều trường đại học. Thế nhưng Perelman đã từ chối mọi lời mời và quay về St. Peterburg. Và ở đó ông đã tạo nên kì tích. Năm 2002 ông công bố chứng minh Giả thuyết Poincaré trên trang web khoa học tương đối khiêm tốn http://www.archive.org .

Nhưng câu chuyện lại tiếp tục chính tại phương Tây. Năm 2004 các đồng nghiệp người Mỹ đã xác nhận chứng minh của ông là đúng đắn và đầy đủ. Ông chính là người đã giải quyết thành công "bài toán thiên nhiên kỉ". Tuy nhiên, không hiểu vì lí do gì mà giới cầm trịch của làng toán học thế giới không vội chính thức chúc mừng người chiến thắng. Ngược lại, tại Mỹ xuất hiện một nhóm các nhà toán học Trung-Mỹ trơ trẽn tự cho mình chứ không phải Perelman mới chính là người tạo ra bước quyết định trong việc chứng minh Giả thuyết Poincaré. Công bằng mà nói, nhiều nhà toán học Trung Quốc và Mỹ khác đã bảo vệ Perelman và âm mưu đó bị sụp đổ. Nhưng chỉ đến năm 2006 người ta mới trao cho ông huy chương Fields, giải thưởng toán học cao nhất trên thế giới. Và để trao tặng ông số tiền một triệu đô như đã hứa cho người giải được bài toán Poincaré, người Mỹ mất thêm đúng 4 năm. Trong câu chuyện này ta dễ cảm nhận về sự thiếu tôn trọng.

Perelam có lí do đạo đức để từ chối huy chương và không nhận số tiền một triệu đô.

Thế còn Tổ quốc đã làm gì cho Perelman? Trong những năm đó ai trong số những nhà khoa học Nga có uy tín đã đứng ra bảo vệ nhà toán học thiên tài? Nước Nga đã trao tặng ông giải thưởng gì? Ông có được mời đến điện Kremli để nhận lời cám ơn vì chiến thắng huy hoàng mà ông đã đem lại cho Tổ quốc? Và tại sao Viện Hàn lâm Khoa học Nga phải mất đến 9 năm mới đưa ra được quyết định kết nạp ông vào đội ngũ ưu tú của mình?

Chính quyền của các bạn, xã hội của các bạn lúc nào cũng thích phàn nàn là phương Tây luôn tìm cách lôi kéo và ăn cắp những cái đầu thông minh nhất của nước Nga. Nhưng nước Nga đã làm gì cho những người ở lại?

Số người ở lại không ít. Ví dụ như Sergey Ruksin, nhà toán học và nhà sư phạm, người đã đào tạo cậu bé Perelman tại câu lạc bộ của mình. Ruksin là nhà giáo nổi tiếng thế giới. Ngoài Perelman, học trò của ông còn là Stanislav Smirnov - người cũng được huy chương Fields (2010), Alexander Khalifman - nhà vô địch cờ vua thế giới - và hơn 80 người đoạt huy chương Olympic toán học quốc tế (trong số đó có hơn 40 huy chương vàng),. . .

Còn Tổ quốc đã đánh giá thế nào về những đóng góp của ông? Ruksin, Tiến sỹ khoa học Toán học, nhận được lương tháng 14.000 rúp [(1)]. Nhưng không buồn, ông có thể kiếm tiền ở những nơi khác. Ngoài ra ông còn dẫn dắt câu lạc bộ huyền thoại của mình trên cơ sở thiện nguyện, công ích.

Vẫn như 30 năm trước đây, hai lần mỗi tuần, mỗi lần bốn tiếng Ruksin và các những cộng sự trẻ nhiệt huyết của mình tham gia giảng dạy cho các học sinh tài năng của thành phố Piter. Có hơn 200 học sinh theo học tại trung tâm toán học của ông. Nhà nước không ngăn cản, thậm chí đôi khi còn giúp đỡ, cho học sinh phiếu đi trại hè. Nhưng nói chung là nhà nước không quan tâm đến họ. Ruksin không hề được nhận giải thưởng hay huy chương nào. Và tất nhiên, sau năm năm kể từ ngày trao giải Fields cho Perelman, cả Tổng thống cũng như Thủ tướng đều không thể dành chút thời gian để chúc mừng người thầy hay trung tâm toán học của ông với những thành tựu kiệt xuất của các học trò.

Mà câu lạc bộ hoạt động miễn phí, theo phương pháp Xô Viết cổ điển của Ruksin. Phương pháp mà ông tuyên bố là dựa trên những giá trị nhân văn về giáo dục của Humboldt. Học trò của ông giải các định lý từ các lĩnh vực toán học khác nhau. Ngoài ra Ruksin còn gợi tạo sự hứng thú của trẻ đối với các môn sinh học, thơ ca, âm nhạc và lịch sử. Ông dạy cho chúng tìm kiếm các mối quan hệ từ các sự kiện, hiện tượng và ý tưởng khác nhau.

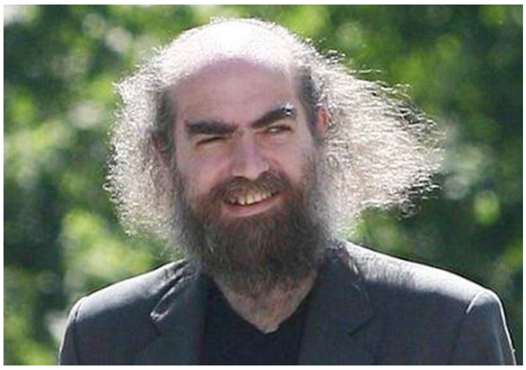
[(1)]ND: 14.000 rúp tương đương với 450$, thấp hơn nhiều lần so với lương của nhân viên bình thường làm tại doanh nghiệp.

Trẻ em trong câu lạc bộ của ông thông minh và say mê như chính thời Perelman theo học. Ruksin không loại trừ là trong số họ sẽ xuất hiện một Perelman mới. Nhưng ông nghi ngờ là mình và mọi người vẫn sẽ trung thành với Tổ quốc như trước. "Giới trẻ hoặc sẽ bỏ đi hoặc sẽ chuyển sang kinh doanh".

Điều này dễ hiểu. Liệu có thể mong đợi họ làm hết mình trong trường đại học với tư cách là nghiên cứu sinh, phó giáo sư hay giáo sư với lương tháng không bằng số tiền hối lộ mà một cảnh sát giao thông Mát-xơ-va kiếm được trong một đêm? Đừng mong đợi ở thế hệ trẻ sự khắc khổ của Perelman hay sự nhiệt tình của Ruksin. Ở nước ngoài họ được chào đón tại những bộ môn danh giá của các trường đại học Mỹ, Âu và Đông Nam Á, hay tại các trung tâm nghiên cứu của Microsoft và Apple. Còn trên quê hương mình họ chỉ nhận được tiếng cười khinh bỉ: "Xem kìa, đồ thất bại!"

Ở nước Nga, mỗi thằng ngốc đều có thể mua được tấm bằng đại học hay danh hiệu phó tiến sĩ tại các đường hầm qua đường. Phần lớn các chỗ làm thơm ngon được dành không phải cho những người tài năng mà cho kẻ đục khoét. Chính phủ Nga có tiền để mua tàu chiến Pháp, để xây những thành phố nano sáng tạo và chào mời người Nga quay về, những người đã trở thành ngôi sao khoa học thế giới. Nhưng họ thậm chí không thèm thử kiếm tiền để trả cho những nhà khoa học trẻ của mình một mức lương có tính cạnh tranh.

Hãy thử tưởng tượng một câu lạc bộ bóng đá mà ban huấn luyện đã đào tạo hết cầu thủ siêu tài này đến cầu thủ siêu tài khác nhưng lãnh đạo không thích phong cách lỗi thời của các huấn luyện viên trẻ và không coi trọng học trò của họ. Ban lãnh đạo tiếc rẻ mà không đưa ra những hợp đồng xứng đáng với các cầu thủ. Những cầu thủ này bỏ sang Anh, Tây Ban Nha. Và khi thành siêu sao, câu lạc bộ ruột thịt của chính họ mới sẵn sàng chi số tiền khổng lồ để mời họ quay lại. Đây chính là chính sách khoa học-nhân sự theo kiểu Nga. Nhưng điều buồn nhất là người huấn luyện viên cuối cũng cũng sắp thôi việc.



Grigori Perelman. *Nguồn: Internet*

Còn Perelman? Nghe nói ông là người cực đoan về đạo đức, không công nhận giải thưởng từ những bàn tay không sạch. Nhưng ít ra là ông làm những gì mà ông muốn. Một cách nhất quán. Như vậy, không phải Perelman là người thất bại, mà có vẻ như đất nước mới chính là kẻ thất bại, siêu thất bại.

Phỏng dịch: **Tam Phong**

Bóng đá: Đâu là cơ may?

Sebastián Escalón

Để hiểu rõ hơn về việc xác suất đóng vai trò gì trong bóng đá, các nhà nghiên cứu vừa mới thử mô phỏng một giải đấu, trong đó số lượng các trận đấu có xu hướng tăng đến vô cùng. Việc này có thể giúp lý giải và dự đoán vì sao các đội yếu lại đôi khi vượt lên đứng đầu?

Ngày 7 tháng 5 năm 2016 đã chứng kiến một kỳ tích trong thế giới bóng đá: lần đầu tiên đội Leicester City đoạt ngôi vô địch Premier League, đúng hai năm sau khi thăng hạng lên giải bóng đá hàng đầu nước Anh. Một đội bóng nhỏ bé với ngân sách hạn hẹp và không có một cầu thủ ngôi sao nào đã làm cho các đội Manchester, Chelsea và Arsenal phải hít khói, qua đó chứng minh rằng trong bóng đá, chàng tý hon David vẫn có thể đánh bại gã khổng lồ Goliath. Do những tài năng phi thường? Do phong độ các đội bóng lớn đi xuống? Do may mắn liên tục? Dù gì chăng nữa, có một điều chắc chắn là sự may rủi cũng đóng một vai trò đáng kể trong bóng đá. Mà may rủi có thể xem xét theo quan điểm toán học.

Một nhóm các nhà nghiên cứu đã quyết định nghiên cứu các xác suất tiềm ẩn trong các giải vô địch bóng đá và những giải thi đấu thể thao khác. Một trong những mục tiêu chính của họ là đưa ra các công thức giải thích tại sao đôi khi các đội nhỏ lại có thể hạ đo ván các ông lớn. Raphaël Chétrite, một nhà nghiên cứu làm việc tại Phòng thí nghiệm Dieudonné thuộc Đại học Nice Sophia-Antipolis, Pháp, đồng thời là một người hâm mộ bóng đá cuồng nhiệt, nói "Tôi đã mong muốn được làm việc với chủ đề này sau một thời gian dài. Cuối cùng tôi đã thuyết phục được các đồng sự rằng bóng đá cũng đặt ra những thách thức phức tạp và thú vị". Các định lý khởi đầu của họ về chủ đề này vừa được công bố trong tạp chí Annals of Applied Probability.

Bóng đá có điểm gì thật đặc biệt trái ngược với bóng ném hoặc bóng nước? Chétrite cho biết: "Bóng đá là môn thể thao đậm tính ngẫu nhiên với số bàn thắng rất ít. Ngay cả một đội yếu cũng có thể ghi một “bàn thắng may mắn” và sau đó đổ bê tông trong khu vực phạt đền của mình cho đến tiếng còi chung cuộc. Trong bóng ném, nơi mà số bàn thắng cao, sẽ rất khó khăn cho một đội yếu để đánh bại một đội bóng mạnh hơn". Các con số thống kê cũng chứng thực cho lập luận trên. Phân tích 100 năm giải bóng đá Anh cho thấy các đội bóng mạnh, theo đánh giá của giới cá cược, chỉ thắng có 45% các trận đấu. Nhưng các nhà toán học muốn đi xa hơn. Họ tự hỏi liệu trong suốt một giải đấu dài, tính ngẫu nhiên của các trận đấu có làm sai lệch việc đánh giá trình độ hay không. Liệu có khả năng “Luật Số lớn” không loại bỏ được tính may rủi và liệu có thể tạo ra một giải đấu có thể dự đoán được mà trong đó đội bóng hay nhất luôn thắng?

Để trả lời câu hỏi này, các nhà nghiên cứu đã tưởng tượng ra một cuộc đua tài chỉ tồn tại trong toán học: một giải vô địch mà số lượng trận đấu tiến tới vô

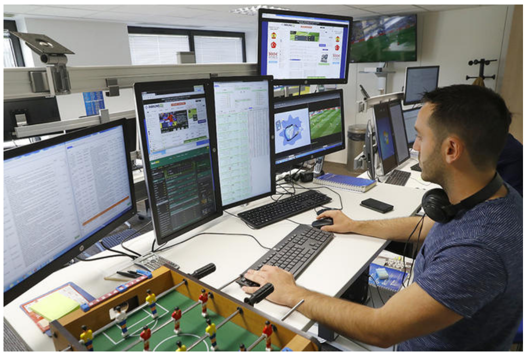
Leicester là một minh họa về hiện tượng mà các nhà nghiên cứu gọi là Định lý Cô bé Lọ Lem - đôi khi các đội yếu có thể chiến thắng các đối thủ mạnh. *Nguồn: Internet*

cùng. Trong mô hình đó, sức mạnh của mỗi đội vào đầu mùa giải được phân bố ngẫu nhiên, nhưng có cùng "phân phối", tức là phân bố sức mạnh của các đội được biểu diễn bằng một hàm số duy nhất. Mỗi trận đấu có một kết quả ngẫu nhiên với xác suất được xác định tùy theo sức mạnh của hai đối thủ theo mô hình Bradley-Terry. Bằng cách thay đổi phân phối sức mạnh của các đội, họ tìm cách xác định các tình huống có trong các giải vô địch bóng đá, từ trường hợp sức mạnh của hai đội đối địch cân bằng cho đến trường hợp có một đội có ưu thế áp đảo. Bằng cách này họ đã chứng minh được ba định lý.

Định lý đầu tiên đã xác định được một nhóm lớn các phân phối tồn tại trong một giải vô địch "điển hình" mà ở đó đội mạnh nhất luôn giành chiến thắng chung cuộc. Tuy nhiên, khi rời khỏi kịch bản đặc biệt đó, các nhà nghiên cứu gặp một số điều bất ngờ. Khi chọn một nhóm phân phối khác, đội yếu nhất lại có cơ hội làm ăn tốt hơn đội mạnh nhất. Các nhà nghiên cứu gọi kịch bản này là "Định lý Cô bé Lọ Lem". Lịch sử bóng đá đã chứng kiến các đội "Lọ Lem" hay “cậu Tom ngón tay" giống như đội Leicester City can đảm, vô địch bóng đá Anh năm 2016. Bây giờ đã có một định lý giải thích hiện tượng này.

Các nhà nghiên cứu cũng khảo sát các đội bóng nổi trội mạnh đến nỗi như nằm ngoài đường phân phối sức mạnh. Theo mức độ nào đó có thể so sánh tình huống này với đội Paris Saint Germain của "Ligue 1" của Pháp: đội này với ngân sách gấp 8 lần so với ngân sách trung bình của các đối thủ, đã có 31 điểm nhiều hơn các đội thứ nhì trong mùa giải vừa qua. Các nhà toán học muốn biết trong trường hợp nào thì đội mạnh nhất sẽ giành chiến thắng bất chấp tất cả. Họ phát hiện ra một hiệu ứng bất ngờ: đội bóng mạnh nhất sẽ gặp nhiều khó khăn hơn trong việc giành chức vô địch của một giải đấu gồm hầu hết các đội yếu so với một giải đấu có nhiều đội mạnh. Đây là điều được Chétrite gọi là "cái bẫy của các đội nhỏ". Lý do của nghịch lý này như sau: trong một giải đấu gồm chủ yếu các đội yếu, một đội mạnh có thể kiếm được nhiều điểm khi thi đấu với các đội yếu hơn và vượt qua đội bóng mạnh nhất trên bảng xếp hạng. Trong một giải đấu mạnh, số đông các đội khá đều có khả năng lấy điểm lẫn nhau, do đó tạo ưu thế cho đội bóng mạnh nhất.

Theo các nhà nghiên cứu, các công ty cá cược có thể sử dụng ngay loại phương pháp này để ấn định tỷ số đánh cược cho các trận đấu. Mathieu Lerasle, nhà nghiên cứu thuộc phòng thí nghiệm d'Orsay của Đại học Paris Sud, cho biết: "Trong khi các phương pháp truyền thống đòi hỏi phải quan sát toàn bộ giải đấu, chúng tôi hy vọng cách tiếp cận của mình cho phép dự đoán chỉ sau hai hoặc ba trận đấu của mùa giải".



Một nhân viên của "Parions sport", sàn cá cược thể thao Pháp trong thời gian diễn ra Euro 2016. *Nguồn: Internet*

Tuy nhiên Chétrite chưa muốn dừng lại ở đó khi nói: "Còn rất nhiều việc phải làm trong lĩnh vực này. Toán học có tầm ảnh hưởng lớn ở đây bởi vì có hàng tỷ người quan tâm đến bóng đá". Những quyết định quan trọng của các cơ quan như UEFA và FIFA chưa được phân tích bằng lý thuyết xác suất. Vì thế, những câu hỏi như tác động của luật cân bằng tài chính lên sức mạnh của các đội hay của World Cup gồm 48 quốc gia, có thể đặt ra những vấn đề thú vị về lý thuyết.

Người dịch: **Hồ Đăng Phúc** (Viện Toán học, Viện HLKHCN Việt Nam)

Tin tức hội viên và hoạt động toán học

LTS: *Để tăng cường sự hiểu biết lẫn nhau trong cộng đồng các nhà toán học Việt Nam, Tòa soạn mong nhận được nhiều thông tin từ các hội viên Hội Toán học Việt Nam về chính bản thân, cơ quan hoặc đồng nghiệp của mình.*

PGS. TS. Nguyễn Sum, Khoa Toán, Trường ĐH Quy Nhơn, đã được trao giải thưởng Tạ Quang Bửu năm 2017. Lĩnh vực nghiên cứu của PGS. Nguyễn Sum là Tô pô Đại số. Công trình mang lại giải thưởng cho ông là bài báo “On the Peterson hit problem”, đăng trên tạp chí danh tiếng *Advances in Mathematics* năm 2015.

PGS. Nguyễn Sum sinh năm 1961 ở huyện Phù Cát, Bình Định. Ông tốt nghiệp Trường Đại học Quy Nhơn năm 1983. Sau đó ông học sau đại học tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Ông bảo về luận án tiến sỹ tại Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội năm 1993.

Giải thưởng Tạ Quang Bửu năm nay được trao cho hai nhà khoa học là PGS. TS. Nguyễn Sum và GS. TS. Phan Thanh Sơn Nam, Trường Đại học Bách Khoa, Đại học Quốc gia Tp. HCM, lĩnh vực Hóa học.

Chung kết Cuộc thi " Mô hình Toán ứng dụng trong kinh tế và tài chính" lần thứ nhất đã được tổ chức chiều ngày 27/6/2017 tại trường Đại học Ngoại thương ở Hà Nội. Đây là cuộc thi nghiên cứu khoa học trong sinh viên một số trường đại học nhằm ứng dụng các công cụ toán học vào giải quyết các bài toán kinh tế và tài chính. Cuộc thi hướng tới đẩy mạnh ứng dụng các mô hình toán học và áp dụng các công cụ định lượng trong nghiên cứu khoa học của sinh viên, qua đó nâng cao chất lượng các kết quả của các công trình nghiên cứu khoa học. Kết thúc vòng chung kết, ban tổ chức đã trao một giải nhất, hai giải nhì và ba giải ba cho các công trình xuất sắc nhất.

Trách nhiệm mới

GS. TSKH. Phùng Hồ Hải đã được Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam bổ nhiệm làm Viện trưởng Viện Toán học từ ngày 1/9/2017, thay cho GS. TSKH. Lê Tuấn Hoa do hết tuổi quản lý. GS. Phùng Hồ Hải sinh năm 1970 tại Hà Nội, ông tốt nghiệp Đại học Lomonosov (LB Nga) năm 1992 và bảo vệ tiến sỹ tại Đại học Munich (CHLB Đức) năm 1996. Ông được phong chức danh phó giáo sư năm 2006 và giáo sư năm 2012. Lĩnh vực nghiên cứu chính của GS. Phùng Hồ Hải là Đại số (Nhóm lượng tử, Đại số Hopf) và Hình học đại số (Đối ngẫu Tannaka, Lược đồ nhóm cơ bản).

PGS. TS. Nguyễn Quang Huy đã được Bộ GD&ĐT bổ nhiệm giữ chức Hiệu trưởng Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 nhiệm kỳ 2017-2022. PGS. Nguyễn Quang Huy tốt nghiệp Trường ĐHSP Hà Nội 2 năm 1995, bảo vệ tiến sỹ tại Viện Toán học năm 2004. Ông được phong chức danh phó giáo sư năm 2012. Lĩnh vực nghiên cứu chính của PGS. Nguyễn Quang Huy là lý thuyết tối ưu.

Trường Đại học Sư phạm - ĐH Thái Nguyên đã bổ nhiệm bổ sung PGS. TS. Hà Trần Phương giữ chức vụ Phó Hiệu trưởng Trường Đại học Sư phạm, nhiệm kỳ 2015 - 2020. PGS. Hà Trần Phương bảo vệ luận án tiến sỹ tại Viện Toán học năm 2009 và được phong chức danh phó giáo sư năm 2015. Chuyên ngành nghiên cứu của ông là Lý thuyết Nevanlinna.

Tin buồn

PGS. TS. NGND. Phan Đức Chính đã từ trần ngày 26/8/2017 (tức ngày 5/7 năm Đinh Dậu), ông hưởng thọ 82 tuổi.

PGS. Phan Đức Chính (hàng đầu bên phải) cùng với đội tuyển IMO đầu tiên của Việt Nam năm 1974 (hàng sau). *Nguồn: Internet*

Nhà giáo - PGS. Phan Đức Chính nguyên là giảng viên cao cấp của Khoa Toán-Cơ-Tin học, Trường ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội. Ông cũng là một trong những người thầy đầu tiên dạy Đại số cho lớp Chuyên toán đầu tiên của Việt Nam.

PGS. Phan Đức Chính sinh ngày 15/9/1936 tại Sài Gòn. Ông từng học tại Trường Trung học Albert Sarraut (Hà Nội) và tốt nghiệp Trường ĐH Sư phạm Khoa học, trở thành cán bộ giảng dạy Toán học tại trường này năm 20 tuổi. Ông bảo vệ luận án phó tiến sỹ (nay là tiến sỹ) Toán - Lý năm 1965 tại đại học danh tiếng Lomonosov (Nga) lúc 29 tuổi.

PGS. TS. Văn Như Cương đã mất ngày 9/10/2017, hưởng thọ 80 tuổi. PGS. Văn Như Cương sinh năm 1937 tại Quỳnh Lưu, Nghệ An. Sau khi tốt nghiệp Đại học Sư phạm Hà Nội, ông được giữ lại làm giảng viên của trường. Ông bảo vệ luận án phó tiến sỹ tại Viện Toán học, thuộc Viện Hàn lâm Khoa học Liên Xô vào năm 1971 dưới sự hướng dẫn của nhà hình học Lyudmila Keldysh.

PGS. Văn Như Cương đã tham gia chủ biên và trực tiếp biên soạn rất nhiều sách giáo khoa cho học sinh phổ thông cũng như nhiều sách tham khảo ở bậc phổ thông và bậc đại học. Ông là người mở trường phổ thông dân lập đầu tiên ở Việt Nam, Trường Lương Thế Vinh, vào năm 1989.

Tin toán học thế giới

Giải thưởng Shaw mục Toán học năm 2017 được trao cho hai nhà hình học đại số là János Kollár (Đại học Princeton, Mỹ) và Claire Voisin (Collège de France, Pháp). Hai nhà toán học được trao giải thưởng nhờ những kết quả quan trọng trong những hướng trung tâm của hình học đại số, những kết quả này đã làm thay đổi lĩnh vực này cũng như giúp trả lời những câu hỏi mở tồn tại trong thời gian dài.

János Kollár, viện sỹ Viện Hàn lâm Khoa học Quốc gia Mỹ, gần đây nghiên cứu không gian moduli của các đa tạp chiều cao và đạt được những kết quả sâu sắc có thể ảnh hưởng đến những nghiên cứu trong những thập kỷ tiếp theo. Claire Voisin là nhà nữ toán học đầu tiên giữ ghế giáo sư tại Collège de France, bằng cách chứng minh sự tồn tại của các đa tạp Kähler compact mà không là biến dạng của các đa tạp xạ ảnh, bà đã giải quyết được bài toán Kodaira. Ngoài ra bà cũng giải quyết được Giả thuyết Green và đưa ra một phản ví dụ cho một mở rộng của Giả thuyết Hodge[1]

Viện Hàn lâm Khoa học Hoàng gia Thụy Điển đã công bố chủ nhân của giải Nobel Vật lý 2017 là ba nhà vật lý Rainer Weiss (Viện Công nghệ Massachusetts - MIT, 1/2 giải), Barry C. Barish (Đại học California ở Berkeley - UCB, 1/4 giải) và Kip S. Thorne (Viện Công nghệ California - Caltech, 1/4 giải). Ba nhà khoa học được trao giải năm nay do thực hiện các dự án LIGO/VIRGO và lần đầu tiên đã quan sát được sóng hấp dẫn vào năm 2015. Khám phá nổi tiếng này đã chứng minh cho phỏng đoán của Albert Einstein cách đây gần một thế kỷ, và

[1] Về Claire Voisin, xem thêm Số 1, Tập 21 Thông tin Toán học (tháng 3/2017).

đã tạo ra bước ngoặt lớn trong việc chinh phục vũ trụ của loài người (Theo ủy ban trao giải Nobel 2017).

Nhà toán học Vladimir Voevodsky, giáo sư tại Viện Nghiên cứu cao cấp (IAS) Princeton, đã mất ngày 30/9/2017 tại nhà riêng ở Princeton, hưởng dương 51 tuổi. Ông nổi tiếng với các công trình về đồng luân của lược đồ đại số, K-lý thuyết đại số và sự tương quan giữa hình học đại số và tô pô đại số. Voevodsky đã phát triển những lý thuyết đồng điều mới cho các đa tạp đại số, từ đó dẫn đến việc giải quyết các giả thuyết của Milnor và Bloch-Kato. Nhờ các công trình này ông đã được trao huy chương Fields vào năm 2002 tại Đại hội Toán học Quốc tế ở Bắc Kinh. Gần đây ông chuyển quan tâm sang việc hình thức hóa cơ sở lý thuyết toán học và kiểm chứng bằng chứng minh hình thức.

Vladimir Voevodsky sinh ngày 4/6/1966 ở Moscow trong một gia đình có bố, Alexander Voevodsky, là lãnh đạo Phòng thí nghiệm Năng lượng cao, Viện Năng lượng hạt nhân thuộc Viện hàn lâm Khoa học Liên Xô, và mẹ, Tatyana Voevodskaya, là một giáo sư hóa học tại Đại học Lomonosov (Moscow). Ông tốt nghiệp Đại học Lomonosov năm 1989 và bảo vệ luận án tiến sỹ tại Đại học Harvard năm 1992 dưới sự hướng dẫn của giáo sư David Kazhdan.

Thông tin hội nghị

Hội thảo Quốc tế "Các thuật toán tối ưu và một số vấn đề có liên quan"

Thời gian và Địa điểm: Viện Toán học, từ 14-16/12/2017.
Mục đích: Hội nghị là một diễn đàn cho các chuyên gia Việt Nam và quốc tế trao đổi các ý tưởng mới và các kết quả mới về các phương pháp tối ưu nói chung, và các thuật toán tối ưu nói riêng. Hội nghị sẽ dành một phiên đặc biệt để kỷ niệm sinh nhật lần thứ 90 của Giáo sư Hoàng Tụy. Các thành tựu khoa học đặc biệt của Giáo sư Hoàng Tụy sẽ được tôn vinh trong một báo cáo tổng quan và các báo cáo khoa học.
Thời hạn: đăng ký: 31/10/ 2017; gửi tóm tắt báo cáo: 15/11/ 2017.
Liên lạc:
OptimizationAlgorithms@math.ac.vn

CIMPA-IMH-VAST research school on "Recent developments in stochastic dynamics and stochastic analysis"

Time&Place: Hanoi, March 5-18, 2018.
The aim of this CIMPA school is to provide a stimulating intellectual environment for researchers from Viet Nam and neighboring countries in Asia to interact. The school is primarily oriented towards PhD students and young researchers working in the area of stochastic partial differential equations, stochastic dynamics, stochastic analysis and their applications. During the school, six mini-courses on chosen topics will be given by the main speakers and there are also working groups sessions.
Website:
http://math.ac.vn/conference/CIMPA2018
Registration deadline: November 5, 2017

Dành cho các bạn trẻ

LTS: "*Dành cho các bạn trẻ*" *là mục dành cho Sinh viên, Học sinh và tất cả các bạn trẻ yêu Toán. Tòa soạn mong nhận được các bài viết hoặc bài dịch có giá trị cho chuyên mục.*

Câu chuyện hai tích phân [(1)]

Vilmos Totik
(Viện Bolyai, Hungary, và Đại học Nam Florida, Mỹ)

1. Bài toán

Chúng tôi trình bày một số tiếp cận với một bài toán giải tích-tổ hợp, mặc dù nhìn có vẻ đơn giản nhưng hoàn toàn không tầm thường. Mục đích của chúng tôi là cho thấy những ý tưởng khác nhau có thể cùng dẫn đến một lời giải.

Bài toán được phát biểu đơn giản như sau: *Cho f và g là hai hàm khả tích trên đoạn $[0,1]$ với*

$$\int_0^1 f = \int_0^1 g = 1. \tag{1}$$

Hãy chỉ ra rằng có một khoảng $I \subset [0,1]$ sao cho

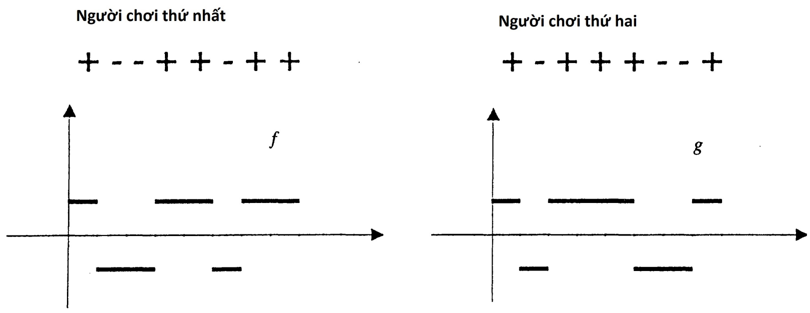
$$\int_I f = \int_I g = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Thay cho $[0,1]$ ta có thể sử dụng một đoạn bất kỳ, và hàm f, g không cần có tích phân bằng 1. Mệnh đề tổng quát là luôn có một khoảng con sao cho tích phân của hai hàm trên đó bằng một nửa tích phân trên toàn đoạn cho trước.

Ta có dạng tương đương của bài toán mà không dùng đến tích phân: *Với một máy chơi blackjack (giống như trò chơi bài xì dách, xì lát), người chơi có thể thắng hoặc thua mỗi lần một đồng. Giả sử có hai người cùng chơi mỗi phút một lần. Người ta nhận thấy rằng sau một thời gian thì cả hai đều thắng đúng $2N$ đồng. Chỉ ra rằng có một khoảng thời gian ở giữa mà hai người đều thắng đúng N đồng.*

Sự tương đương của hai dạng phát biểu của bài toán được tóm tắt như sau. Dạng phát biểu thứ hai là hệ quả của dạng đầu nếu ta áp dụng cho những hàm bậc thang f, g với giá trị $-1, 1$ mô hình hóa kết quả của trò blackjack (Xem Hình 1). Khi đó có một khoảng (a,b) trên đó f, g đều có tích phân bằng N. Nếu cả a, b đều là số nguyên thì (a,b) chính là khoảng thời gian cần tìm. Nếu không, viết các số thành tổng phần nguyên và phần lẻ ta có $a = [a] + \alpha$, $b = [b] + \beta$ với $0 \le \alpha, \beta < 1$.

[(1)] Dịch từ: Totik, Vilmos. A tale of two integrals. *American Mathematical Monthly* **106** (1999), 227-240. Nhờ bài báo này, năm 2000 tác giả Vilmos Totik đã được trao Giải thưởng Paul R. Halmos - Lester R. Ford của Hiệp hội Toán học Mỹ (MAA) cho bài viết xuất sắc đăng ở một trong hai tạp chí *The American Mathematical Monthly* và *Mathematics Magazine*.



Hình 1. Hàm bậc thang mô phỏng kết quả trò blackjack

Nếu $\alpha \neq \frac{1}{2}$ thì tích phân của f, g trên khoảng $([a], [b])$ vẫn bằng N, do đó ta quay về trường hợp a, b là nguyên. Khẳng định này vẫn đúng nếu $\alpha = \frac{1}{2}$ và các giá trị của mỗi hàm tại a và b có cùng dấu. Cuối cùng, nếu $\alpha = \frac{1}{2}$ và một trong hai hàm f hoặc g có dấu tại a và b khác nhau thì dựa trên nhận xét rằng hai tổng dạng $\sum_{k=1}^{m} \pm 1$ luôn có hiệu là một số chẵn, một lập luận đơn giản giúp ta suy ra hàm còn lại cũng có tính chất tương tự như vậy, do đó tích phân của hai hàm trên khoảng $([a]+1, [b])$ đều bằng N.

Ngược lại, giả sử mệnh đề phát biểu theo cách thứ hai qua trò blackjack là đúng và f, g là hai hàm khả tích thỏa mãn điều kiện (1). Ta có thể giả sử cả f và g bị chặn, cụ thể $|f| \leq M$ và $|g| \leq M$. Đồ thị của các hàm

$$\frac{1}{M}\int_0^x f \text{ và } \frac{1}{M}\int_0^x g,$$

có thể xấp xỉ tốt tùy ý bằng các đường gấp khúc với từng khúc bằng nhau và có hệ số góc ± 1. Ta có thể coi hàm hệ số góc của các đường cong xấp xỉ này là kết quả của trò blackjack cho hai người chơi ($+1$ khi thắng và -1 khi thua một đồng), do đó có thể sử dụng các phát biểu thông qua trò blackjack. Từ đây để chứng minh khẳng định (2) chỉ cần sử dụng lập luận thông thường về giới hạn.

Ta sẽ trung thủy với dạng phát biểu đầu tiên của bài toán, dầu giả thiết chính xác về tính khả tích không mấy quan trọng ở đây. Thực tế là bài toán không hề dễ hơn nếu ta giả sử f và g là liên tục, hoặc là các hàm bậc thang. Để thấy điều đó, chỉ cần chú ý như sau. Giả sử f_n và g_n là các hàm thỏa mãn (1) sao cho

$$\int_0^1 |f_n - f| \to 0, \text{ và } \int_0^1 |g_n - g| \to 0,$$

và giả sử tồn tại các khoảng $I_n = (a_n, b_n)$ thỏa mãn đẳng thức (2) đối với f_n và g_n. Bằng cách chọn một dãy con N_1 các số tự nhiên sao cho $\{a_n\}_{n \in N_1}$ và $\{b_n\}_{n \in N_1}$ hội tụ về các số a và b nào đó, thì đẳng thức (2) đúng với $I = (a, b)$. Dẫn đến ta có thể giả sử f, g thuộc vào một không gian con bất kỳ trù mật trong không gian các hàm khả tích, ví dụ như không gian các hàm liên tục hoặc không gian các hàm bậc thang.

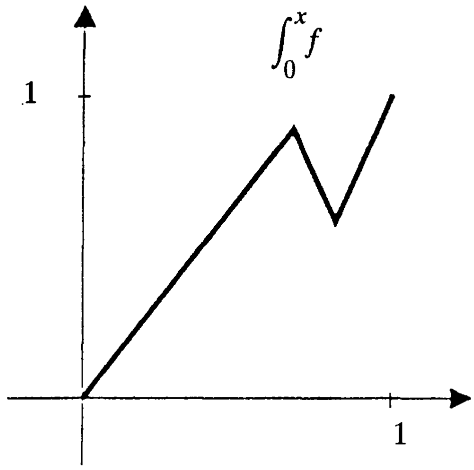
Đối với bài toán gốc, chúng tôi sẽ trình bày một số lời giải mà có liên quan đến các kết quả tổ hợp hoặc hình học/tô pô khác. Một số trong đó thực sự khác nhau, một số có mối tương quan với nhau, nhưng tất cả đều sử dụng những kết quả toán học nổi tiếng. Có cả những cách tiếp cận khác nữa, nhưng không có cách giải sơ cấp nào (chủ yếu dùng qui nạp) tôi biết mà ngắn chỉ trong một hai trang.

Bài toán trên xuất hiện trong Kỳ thi Toán Miklós Schweitzer 1995 ở Hungary. Đây là kỳ thi duy nhất được Hội Toán học János Bolyai tổ chức hàng năm từ năm 1949, vào thời gian cuối năm. Kỳ thi này dành cho sinh viên đại học và sinh viên mới tốt nghiệp, nhưng đôi khi cũng có những học sinh trung học tài năng tham gia và thành công. Khoảng một tá các bài toán (hầu hết là mới) được đề xuất từ các lĩnh vực toán học khác nhau, và sinh viên có 10 ngày để giải các bài toán đó sử dụng tất cả các tài liệu hiện có. Do đó, các bài toán khó hơn hẳn so với các kỳ thi và các kỳ olympiad khác. Đề bài và lời giải cho các kỳ thi từ 1962-1991 đã được xuất bản năm 1995 trong tủ sách Springer Problem Book với tên "*Contests in Higher Mathematics*", G. J. Székely chủ biên.

Bài toán trên khó hơn ta tưởng. Ý nghĩ đầu tiên - dịch chuyển một cách liên tục các điểm đầu mút a, b của khoảng $I = (a, b)$ - dẫn đến một chướng ngại lớn. Lập luận thường là: có một số a_0 sao cho với mỗi $0 \leq a \leq a_0$ có một số b_a thỏa mãn $\int_a^{b_a} f = \frac{1}{2}$. Nếu $\int_0^{b_0} g = \frac{1}{2}$ thì bài toán được giải. Nếu, giả sử $\int_0^{b_0} g < \frac{1}{2}$, thì ta phải có $\int_{b_0}^1 g > \frac{1}{2}$. Vì vậy nếu a thay đổi một cách liên tục từ 0 đến b_0 thì có một giá trị của a sao cho tích phân $\int_a^{b_a} g$ chính xác bằng $\frac{1}{2}$, và do đó đoạn $I = (a, b_a)$ thỏa mãn yêu cầu. Vấn đề ở đây nằm ở chỗ nói chung b_a không phụ thuộc vào a một cách liên tục, do đó toàn bộ lập luận sụp đổ. Thậm chí tệ hơn, nói chung không có những hàm liên tục $b(a)$ sao cho

(3) $$\int_a^{b(a)} f = \frac{1}{2},$$

với mọi $a \in [0, a_0]$ (xem Hình 2). Như vậy, lý luận như trên không thể sửa được.



Hình 2. Không tồn tại hàm liên tục $b(a)$

Lập luận đơn giản bằng tính liên tục như vậy đúng nếu f là thực sự dương vì luôn có một hàm duy nhất $b(a)$ thỏa mãn (3) và $b(a)$ là liên tục. Cộng thêm $\epsilon > 0$ vào f và cho $\epsilon \to 0$, ta suy ra kết luận cũng đúng nếu chỉ giả sử hàm f không âm. Chúng tôi cũng muốn lưu ý rằng với một hàm hằng từng đoạn f, tồn tại các hàm liên tục $a(t), b(t)$ theo tham số $t \in [0, 1]$ sao cho

(4) $$\int_{a(t)}^{b(t)} f = \frac{1}{2},$$

$a(0) = 0, a(1) = b(0)$ và $b(1) = 1$, nên lập luận dựa trên tính liên tục như trên vẫn sử dụng được. Tuy nhiên, chứng minh sự tồn tại của $a(t)$ và $b(t)$ cũng khó không kém bài toán gốc.

2. Định lý Đối cực Borsuk-Ulam

Định lý Borsuk-Ulam [1, p. 241] phát biểu rằng nếu $T : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ liên tục của $\mathbb{S}^2$ (mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^3$) vào mặt phẳng, thì luôn có một cặp điểm đối cực $\{X, -X\}$ của $\mathbb{S}^2$ có cùng ảnh $T(X) = T(-X)$. Nếu ánh xạ T là lẻ, nghĩa là $T(-Y) = -T(Y)$ với mọi điểm

$Y \in \mathbb{S}^2$, thì ta có $T(X) = (0,0)$. Kết quả tương tự cho chiều cao hơn cũng đúng, nghĩa là nếu $T : \mathbb{S}^\ell \to \mathbb{R}^\ell$ là một ánh xạ liên tục của hình cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^{\ell+1}$, thì có một cặp điểm đối cực $\{X, -X\}$ trên mặt cầu $\mathbb{S}^\ell$ có cùng ảnh.

Sử dụng Định lý Borsuk-Ulam, lời giải cho bài toán của chúng ta rất dễ dàng. Xét một điểm (a, b, c) trên mặt cầu $\mathbb{S}^2$, nghĩa là $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Đặt

$$T(a,b,c) = (X(f;a,b,c), X(g;a,b,c)),$$

với

(5)

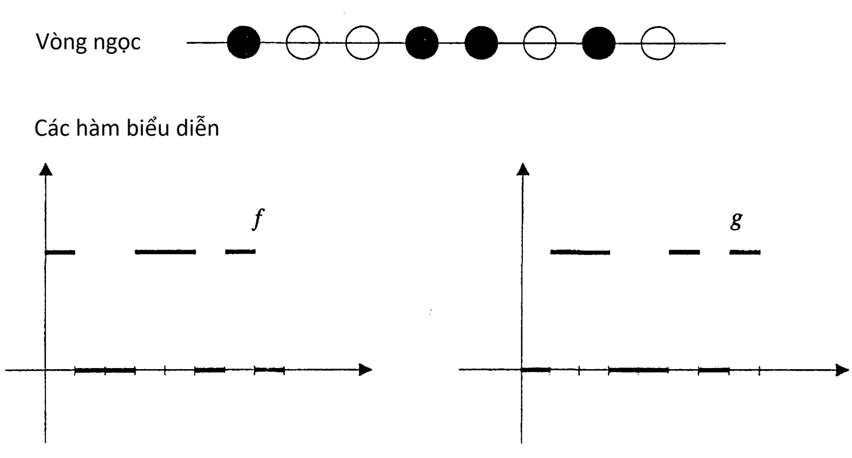
$$X(f;a,b,c) = \operatorname{sign}(a)\int_0^{a^2} f + \operatorname{sign}(b)\int_{a^2}^{a^2+b^2} f + \operatorname{sign}(c)\int_{a^2+b^2}^{1} f.$$

Do T là ánh xạ liên tục, lẻ trên mặt cầu $\mathbb{S}^2$ vào mặt phẳng, Định lý Borsuk-Ulam khẳng định luôn có điểm $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \in \mathbb{S}^2$ ánh xạ vào $(0,0)$ qua T. Trong các số $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, luôn có hai số cùng dấu (số 0 được quy ước có dấu dương). Số còn lại được ký hiệu là e. Lấy I là khoảng lấy tích phân có độ dài e^2 trong công thức (5) mà nhân với $\operatorname{sign}(e)$. Từ định nghĩa của T và do $T(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (0,0)$, ta có

$$\int_I f = \int_{[0,1]\setminus I} f \quad \text{và} \quad \int_I g = \int_{[0,1]\setminus I} g.$$

Khẳng định trong bài toán được chứng minh vì $\int_0^1 f = \int_0^1 g = 1$.

Định lý Borsuk-Ulam là công cụ chuẩn để giải bài toán chiếc vòng ngọc trai. *Hai kẻ cướp biển có một chiếc vòng (một sợi) gồm $2k$ viên ngọc đen và $2k$ viên ngọc trắng được xếp theo thứ tự tùy ý. Họ muốn cắt chiếc vòng bằng ít nhát cắt nhất có thể sao cho sau khi chia các đoạn cắt cho từng người thì mỗi người nhận được chính xác k viên ngọc đen và k viên ngọc trắng*. Thay đổi một chút lời giải ở trên, ta có thể khẳng định rằng hai nhát cắt là đủ (nghĩa là luôn có một đoạn liên tiếp $2k$ viên ngọc trong chiếc vòng chứa chính xác k viên ngọc mỗi loại). Lời giải này liên quan đến trường hợp trong bài toán gốc của ta mà cả hai hàm đều không âm (các hàm biểu diễn hai loại ngọc trên các đoạn cùng độ dài, xem Hình 3); do đó ta không cần đến định lý đối cực mà thay vào đó có thể dùng lập luận về tính liên tục. Nếu chiếc vòng có ℓ loại ngọc và mỗi loại có $2k$ viên ngọc, ta có thể áp dụng phiên bản cho chiều cao của Định lý Borsuk-Ulam để chỉ ra rằng ℓ lần cắt luôn là đủ.



Hình 3. Các hàm biểu diễn trong bài toán chiếc vòng ngọc trai

Tương tự như thế, bằng cách áp dụng định lý đối cực trường hợp chiều cao hơn ta thu được kết quả của A. Pinkus tổng quát hóa bài toán gốc của chúng ta: *Nếu $f_1, \ldots, f_\ell \in L^1[0,1]$ và $\int_0^1 f_j = 1$ với $j = 1, \ldots, \ell$, thì có một tập I chứa nhiều nhất $(\ell+1)/2$ khoảng sao cho $\int_I f_j = \frac{1}{2}$ với mọi $j = 1, \ldots, \ell$.*

3. Bài toán leo núi

Hai nhà leo núi có thể leo từ hai sườn đối diện của một ngọn núi lên đỉnh sao cho cả hai luôn ở cùng một độ cao không? (Xem [7], [9]). Có các cản trở rõ ràng để hai nhà leo núi làm việc này, tuy nhiên câu trả là có nếu sườn núi là các đường gấp khúc và các nhà leo núi bắt đầu leo từ chân núi [6]. Ta sẽ chỉ ra kết quả này dẫn đến một lời giải cho bài toán của chúng ta.

Ta có thể giả sử cả hai hàm f và g là các hàm hằng từng đoạn. Khi đó

$$H(x) = \int_0^x (f(u) - g(u))du,$$

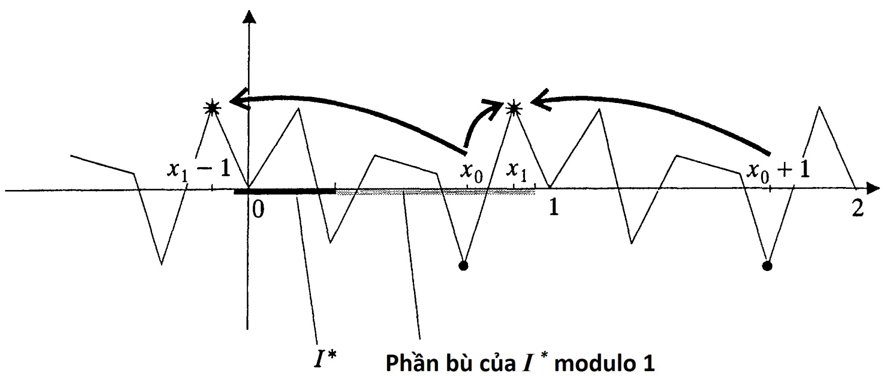
là một hàm tuyến tính từng đoạn với $H(0) = H(1)$, vì vậy ta có thể mở rộng H thành một hàm 1-tuần hoàn và liên tục. Ta cũng mở rộng f, g thành các hàm tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ với chu kỳ 1. Đồ thị của H là "núi" của ta (xem Hình 4), và hai nhà leo núi bắt đầu leo từ độ cao ngang với chân núi đó, ví dụ điểm ứng với x_0 và x_0+1, đến điểm cực đại của H trong đoạn $[x_0, x_0+1]$), gọi là đỉnh tại x_1.

Theo [6], hai nhà leo núi có thể leo lên đến đỉnh sao cho hai người luôn ở cùng độ cao. Do tính tuần hoàn, ta có thể giả sử cả hai nhà leo núi leo từ điểm x_0, người thứ nhất leo sang phải lên đỉnh ở điểm x_1, trong khi người thứ hai leo sang trái lên đỉnh ở điểm $x_1 - 1$. Gọi vị trí theo trục hoành của hai nhà leo núi tại thời điểm $t \in [0,1]$ là $\gamma_1(t)$ và $\gamma_2(t)$. Do đó, γ_j là các hàm liên tục sao cho $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x_0$, $\gamma_1(1) = x_1$, $\gamma_2(1) = x_1 - 1$, và tại mọi thời điểm thì $\gamma_2(t) \le x_0 \le \gamma_1(t)$. Do các nhà leo núi luôn ở cùng độ cao nên

$$\int_{\gamma_2(t)}^{\gamma_1(t)} f(u)du = \int_{\gamma_2(t)}^{\gamma_1(t)} g(u)du. \tag{6}$$

Tuy nhiên, tích phân bên trái bằng 0 với $t = 0$, và 1 với $t = 1$ do $[\gamma_2(1), \gamma_1(1)] = [x_1 - 1, x_1]$ là một chu kỳ của f, và là một hàm liên tục theo t, do đó có một số $t = t^*$ sao cho vế trái bằng $\frac{1}{2}$. Khi đó vế phải của (6) cũng bằng $\frac{1}{2}$, điều đó có nghĩa là với $I^* = [\gamma_2(t^*), \gamma_1(t^*)]$ thì

$$\int_{I^*} f = \int_{I^*} g.$$



Hình 4. Ngọn núi của hai nhà leo núi

Đây có vẻ là điều ta mong muốn, nhưng phải cẩn thận vì có thể I^* không nằm trong đoạn $[0,1]$ (hay trong đoạn $[n,n+1]$ nào đó). Nếu $I^* \subseteq [0,1]$ thì ta đơn giản lấy $I = I^*$. Nếu không, ta lấy I là phần bù của I^* modulo 1 như trong Hình 4, tập này thỏa mãn đẳng thức (2).

Lời giải này dẫn đến một tổng quát hóa của bài toán. *Cho f và g là hai hàm khả tích trên $[0,1]$ thỏa mãn (1), và xét $0 < \alpha < 1$. Nếu không có đoạn $I \subset [0,1]$ nào thỏa mãn*

$$\int_I f = \int_I g = \alpha,$$

thì có một đoạn I với

$$\int_I f = \int_I g = 1 - \alpha. \tag{7}$$

Chứng minh của ta chỉ ra $I = I^*$ cho α nếu $I^* \subset [0,1]$; nếu $I^* \not\subseteq [0,1]$ thì chọn I là phần bù của I^* modulo 1.

Như vậy, với mọi $\alpha \in (0,1)$, luôn có một khoảng I mà tích phân của f và g hoặc cùng bằng α hoặc cùng bằng $1-\alpha$. Với $\alpha = \frac{1}{2}$, điều này có nghĩa là cả hai f và g đều có tích phân bằng $\frac{1}{2}$ như phát biểu trong bài toán. Với $\alpha = 1/3$, có một khoảng I sao cho cả hai hàm có tích phân $1/3$ trên I, hoặc cả hai có tích phần $2/3$ trên I. Ở trường hợp sau, ta có thể áp dụng trường hợp $\frac{1}{2}$ đã chứng minh cho I và kết luận rằng có một khoảng con của I mà hai hàm có tích phân trên đó đều bằng $(\frac{1}{2}).(2/3) = 1/3$. Do đó luôn có một đoạn mà hai hàm có tích phân trên đó bằng $1/3$. Lặp lại lập luận này để thu được các đoạn mà trên đó tích phân của hai hàm bằng nhau và bằng $1/4, 1/5, 1/6, \ldots$ Đây là một tổng quát hóa của bài toán gốc: *Cho f và g là các hàm khả tích trên $[0,1]$ thỏa mãn (1) và cho k là một số nguyên dương. Khi đó có một khoảng I sao cho*

$$\int_I f = \int_I g = \frac{1}{k}. \tag{8}$$

Điều này không đúng nếu $\alpha \in (0,1)$ không có dạng $\alpha = 1/k$. Ví dụ, cho hai hàm f, g trên đoạn $[0,1]$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2n+1}{n+1} & \text{nếu } \frac{2k}{2n+1} \le x \le \frac{2k+1}{2n+1}, \\ & \text{với một } k = 0,1,\ldots,n; \\ 0 & \text{còn lại,} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2n+1}{n} & \text{nếu } \frac{2k-1}{2n+1} \le x \le \frac{2k}{2n+1}, \\ & \text{với một } k = 1,\ldots,n; \\ 0 & \text{còn lại.} \end{cases}$$

Khi đó không có $\alpha \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ nào để có một đoạn I thỏa mãn

$$\int_I f = \int_I g = \alpha.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] M. K. Agoston, Algebraic topology. *Pure and Applied Mathematics* **32**, Marcell Dekker, Inc., New York, Basel, 1976.

[2] D. W. Blackett, Elementary Topology. Academic Press, Inc., New York, 1982.

[3] *Contests in Higher Mathematics, 1949-1961*. Académiai Kiadó, Budapest, 1968.

[4] Problem 235. *Delta; Mathematical, Physical and Astronomical Popular Monthly* **115/7** (1983), p. 7.

[6] J. E. Goodman, J. Pach, and C. K. Yap, Mountain climbing, ladder moving and the ring-width of a polygon. *Amer. Math. Monthly* **96** (1989), 494-510.

[7] J. P. Huneke, Mountain climbing. *Trans. Amer. Math. Soc.* **139** (1969), 383-391.

[9] J. V. Whittaker, A mountain climbing problem. *Can. J. Math.* **18** (1966), 873-887.

(còn nữa)

Người dịch: **Đoàn Trung Cường**

(Viện Toán học - Viện HLKHCN Việt Nam)

THÔNG TIN TOÁN HỌC, Tập 21 Số 3 (2017)