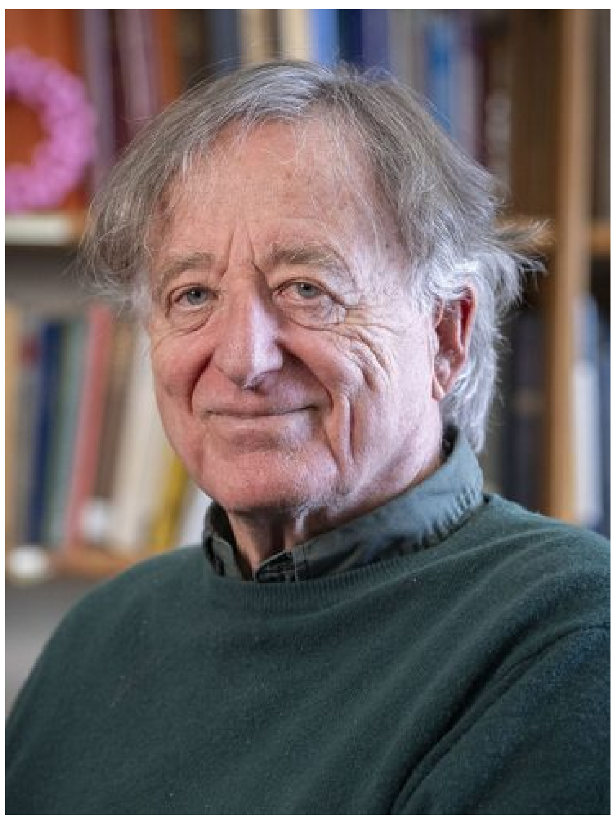
Hội Toán Học Việt Nam

THÔNG TIN TOÁN HỌC

Tháng 3 Năm 2022 Tập 26 Số 1



THÔNG TIN TOÁN HỌC

Newsletter of the Vietnamese Mathematical Society

Bìa 1. Dennis Sullivan, giải thưởng Abel 2022. Ảnh: John Griffin/Stony Brook University.

THỂ LỆ GỬI BÀI

Bài viết bằng tiếng Việt. Tất cả các bài, thông tin về sinh hoạt toán học ở các khoa (bộ môn) toán, về hướng nghiên cứu hoặc trao đổi về phương pháp nghiên cứu và giảng dạy đều được hoan nghênh. Bản tin cũng nhận đăng các bài giới thiệu tiềm năng khoa học của các cơ sở cũng như các bài giới thiệu các nhà toán học.

Bài viết xin gửi về tòa soạn theo địa chỉ email của một trong các biên tập viên, hoặc địa chỉ bưu điện ở trên. Nếu bài được đánh máy tính, xin gửi kèm theo file với phông chữ unicode. Toà soạn khuyến khích các tác giả sử dụng chương trình soạn thảo Latex và gói tiếng Việt vntex.

ĐỊA CHỈ BƯU ĐIỆN

Bản tin **Thông Tin Toán Học**,
Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học
và Công nghệ Việt Nam,
18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy,
10307 Hà Nội

BẢN ĐIỆN TỬ CỦA TẤT CẢ CÁC SỐ TẠP CHÍ CÓ THỂ TRUY CẬP TỪ TRANG MẠNG CỦA HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM
`www.vms.org.vn`

Toán học thế kỷ hai mươi[1]

Michael Atiyah[2]

Để nói về toán học của một thế kỷ vừa qua và toán học của một thế kỷ đang đến, bạn có hai lựa chọn, cả hai đều khó khăn. Thứ nhất là trình bày tổng quan về toán học của một trăm năm vừa rồi, thứ hai là dự đoán toán học của một trăm năm sắp tới. Tôi chọn thử thách khó khăn hơn trong hai lựa chọn đó. Ai cũng có thể dự đoán về thế kỷ tới, và chẳng mấy người trong chúng ta sống được đến cuối thế kỷ để biết dự đoán đó đúng hay sai. Ngược lại, muốn đưa ra nhận định về thế kỷ đã qua là phải tiên liệu những sự phản đối có thể có.

Điều tốt nhất tôi làm được là đưa ra góc nhìn riêng của mình. Tôi không thể đi vào mọi chủ đề, và hơn nữa còn bỏ qua không ít phần sâu sắc của câu chuyện, một phần vì tôi không phải là chuyên gia về mọi thứ, một phần vì còn có những nguồn khác thảo luận chúng. Tôi sẽ không nói gì, ví dụ, về những sự kiện quan trọng gắn liền với những tên tuổi lớn như Hilbert, Gödel, Turing, trong các lĩnh vực logic toán và tính toán toán học. Tôi cũng sẽ không nói gì về ứng dụng toán học, ngoại trừ những ứng dụng trong vật lý lý thuyết, vì có rất nhiều các ứng dụng như thế và chúng đòi hỏi các thảo luận kỹ thuật. Cần một thảo luận riêng cho mỗi ứng dụng trong số đó. Ngoài ra, tôi sẽ không đưa ra một danh sách các định lý cũng như danh sách các nhà toán học nổi tiếng của thế kỷ qua. Việc đó không mấy thú vị. Thay vào đó tôi sẽ cố gắng chọn ra một số chủ điểm chạy xuyên suốt toán học theo nhiều cách khau và là nguồn khởi phát các sự kiện.

Trước hết cho phép tôi đưa ra một nhận định chung. Thế kỷ là cách phân chia tương đối. Chúng ta không nghĩ rằng sau một trăm năm thời gian bỗng ngừng lại và rồi bắt đầu một chu kỳ mới. Vì vậy khi nói về toán học trong thế kỷ 20, tôi sẽ không quá chặt chẽ về thống kê năm tháng. Nếu có một chủ đề nào đó bắt đầu từ những năm 1890, rồi tiếp tục phát triển vào những năm 1900, tôi sẽ không quan tâm đến thời điểm bắt đầu chính xác. Như một nhà thiên văn, tôi sẽ chấp nhận những con số tương đối. Hơn nữa, nhiều chủ đề toán học xuất hiện từ thế kỷ 19 chỉ thực sự phát triển vào thế kỷ 20.

Một trong những khó khăn của việc bàn về lịch sử là không dễ tưởng tượng ra cách nhìn của một nhà toán học những năm 1900, bởi vì một phần rất lớn của toán học thế kỷ trước đã bị tích hợp vào toán học ngày nay, do chính chúng ta. Rất khó để tưởng tượng về những thời đại mà người ta không tư duy theo cách tư duy quen thuộc của chúng ta ngày nay. Rất nhiều phát minh toán học lớn trong quá khứ, chính vì chúng là những phát minh căn bản, trở thành vô hình trong mắt người đời sau! Những phát minh ấy đã trở thành một phần của nền tảng toán học. Vì thế để ngược dòng lịch sử, ta phải cố gắng tưởng tượng ra một kỷ nguyên khác, khi con người chưa nhìn mọi thứ theo cách vẫn được thực hành ngày nay.

---

[1] Nguyên là bài "Mathematics in the 20th century", The American Mathematical Monthly 108, no. 7 (2001): 654–66. Bài báo này dựa trên băng ghi âm một bài giảng của Michael Atiyah tại Hội thảo Năm Toán học Thế giới 2000, Toronto, 7-9/6/2000.

[2] Nhà toán học lớn người Anh, sinh năm 1929, mất năm 2019, huy chương Fields năm 1966.

1. TỪ ĐỊA PHƯƠNG LÊN TOÀN CỤC

Tôi sẽ bắt đầu với việc liệt kê và thảo luận một số chủ đề. Chủ đề đầu tiên có thể tạm gọi là việc chuyển từ địa phương lên toàn cục, từ bộ phận lên toàn thể. Trong toán học cổ điển các nhà toán học thường nghiên cứu những đối tượng ở tầm vi mô, ví dụ họ sử dụng những hệ tọa độ địa phương. Trong thế kỷ 20, trọng tâm đã chuyển sang việc nghiên cứu những quy luật áp dụng cho tổng thể, ở tầm vĩ mô. Và vì những quy luật ở tầm vĩ mô thường khó nắm bắt hơn, hầu hết các nghiên cứu đều chuyển sang định tính, các ý tưởng của tôpô đóng một vai trò quan trọng. Poincaré là người đi những bước tiên phong trong tôpô học và ông đã tiên đoán rằng tôpô sẽ đóng vai trò quan trọng với toán học thế kỷ 20. Tình cờ là với danh sách bài toán cho thế kỷ 20 nổi tiếng của mình, Hilbert đã không nhìn thấy trước điều đó. Tôpô hầu như không xuất hiện trong danh sách các bài toán Hilbert[(3)]. Trái lại Poincaré có niềm tin chắc chắn ở tầm quan trọng của tôpô.

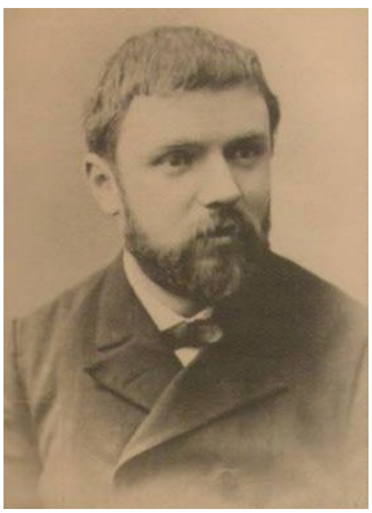
Hãy cùng đi vào một số lĩnh vực cụ thể để làm rõ luận điểm của tôi. Ví dụ, hãy xét giải tích phức (thời đó được gọi là "lý thuyết hàm"), một lĩnh vực trung tâm của toán học thế kỷ 19, với công lao đóng góp của những nhà toán học lớn như Weierstrass. Với các nhà toán học thế kỷ 19, hàm (trong "lý thuyết hàm") có nghĩa là hàm một biến phức, và với Weierstrass một hàm là một chuỗi lũy thừa, một đối tượng cụ thể, có thể viết ra tường minh và mô tả chi tiết; nói cách khác hàm không gì hơn là một công thức. Hàm được xem như công thức: một đối tượng sờ nắn được. Nhưng công trình của Abel, Riemann và những người kế tục họ đã thay đổi cách nhìn của chúng ta, hàm được định nghĩa không chỉ bởi những công thức tường minh mà còn bởi những tính chất toàn cục: kỳ dị của chúng ở đâu, đâu là miền xác định, đâu là miền giá trị. Những tính chất toàn cục này đặc trưng hoàn toàn một hàm. Những thác triển địa phương của các hàm chỉ là một cách để tiếp cận chúng.

Tương tự như thế với phương trình vi phân. Trước đây để giải một phương trình vi phân, người ta thường tìm một lời giải địa phương tường minh: một công thức có thể viết ra và thao tác được trên đó. Theo sự tiến triển của ngành, những nghiệm không tường minh được chấp nhận. Không nhất thiết tồn tại một công thức rõ ràng cho nghiệm. Những điểm kỳ dị của một nghiệm mới là thứ quyết định các tính chất toàn cục của nghiệm đó. Đây là cách nhìn giống về tinh thần, tuy khác về chi tiết, với tiếp cận của giải tích phức.

Trong hình học vi phân, các công trình cổ điển của Gauss và những nhà toán học khác tập trung mô tả những vùng nhỏ trong không gian, những phần riêng biệt của một độ cong, những phương trình địa phương mô tả thuộc tính hình học quanh một khu vực nhỏ. Bước chuyển sang tầm vĩ mô là tương đối tự nhiên một khi ta muốn tìm hiểu bức tranh tổng thể về những bề mặt cong và tôpô của chúng. Chuyển từ vi mô lên vĩ mô, các thuộc tính tôpô trở thành những thuộc tính quan trọng nhất.

[(3)]Chữ "hầu như" của Atiyah là có lý vì bài toán thứ 16 của Hilbert, được chính Hilbert đặt tên là "Bài toán về tôpô của các đường cong và mặt đại số", bao gồm hai phần, là một vấn đề tôpô. Đây vẫn là một vấn đề mở cho đến thời điểm hiện tại – năm 2022. Hilbert có nhắc đến công trình của Poincaré về các đường tròn giới hạn (limiting cycles) khi đề xuất phần thứ hai của bài toán thứ 16. (Các chú thích trong bài là của người dịch.)

Nhìn thoáng qua, lý thuyết số có vẻ không liên quan đến câu chuyện này, nhưng không phải vậy. Các nhà số học phân biệt giữa một bên là "lý thuyết địa phương", khía cạnh của vấn đề chỉ liên quan đến đúng một, hay một tập hữu hạn các số nguyên tố, và một bên là "lý thuyết toàn cục", khía cạnh liên quan đến đồng thời tất cả các số nguyên tố. Sự tương đồng giữa số nguyên tố và điểm, giữa ý niệm về cái địa phương, cái tổng thể của số học với các ngành khác, đã có một tác động quan trọng đối với sự phát triển của lý thuyết số, và các ý tưởng tôpô đã gây ảnh hưởng lên nó.



Henri Poincaré (1854–1912).
Ảnh: Wikipedia.

Trong vật lý, tất nhiên, vật lý cổ điển quan tâm đến bối cảnh địa phương, nơi ta có những phương trình vi phân mô tả dáng điệu ở tầm vi mô; nhưng ở bước tiếp theo, ta phải nghiên cứu dáng điệu vĩ mô của cả hệ. Có thể nói, toàn bộ vật lý hướng đến việc dự đoán điều gì sẽ xảy ra khi ta đi từ tầm vi mô, nơi ta nắm được những hiện tượng đang xảy ra, đến bối cảnh vĩ mô.

2. Tăng số chiều

Chủ đề thứ hai của tôi hơi khác với chủ đề trước, ở đây tôi muốn nói đến việc đi lên những chiều cao hơn. Hãy lại bắt đầu với giải tích phức: lý thuyết cổ điển về giải tích phức nghiên cứu trường hợp một biến và đạt được những kết quả rất tinh tế. Bước chuyển sang trường hợp hai hay nhiều biến hơn chủ yếu diễn ra trong thế kỷ 20 và đưa đến những hiện tượng mới mẻ. Không phải mọi thứ đều giống như trường hợp một biến. Có khá nhiều khía cạnh mới, và lý thuyết n biến ngày càng giữ vai trò chủ đạo, nó là một trong những thành tựu đáng kể của thế kỷ vừa qua.

Tương tự như thế, những nhà hình học vi phân cổ điển tập trung nghiên cứu đường và mặt cong. Hiện nay chúng ta nghiên cứu hình học của các đa tạp n chiều, và không dễ nhận ra tính đột phá của bước chuyển này. Trong quá khứ, đường cong và mặt cong là những đối tượng hữu hình trong không gian. Đa tạp nhiều chiều là những đối tượng có phần phi thực tế, tuy chúng có thể được mô tả bằng toán học, nhưng có lẽ người ta không thực sự bận tâm đến chúng. Việc coi những đa tạp đó là có thực và nghiên cứu chúng một cách nghiêm túc như đường cong và mặt cong, thực sự là sản phẩm của thế kỷ 20. Tương tự như thế các tiền bối thế kỷ 19 cũng không thấy nhiều lý do để nghiên cứu nhiều hàm cùng một lúc thay vì chỉ một hàm, hay nghiên cứu hàm có giá trị vectơ. Ngày nay chúng ta chứng kiến đồng thời sự gia tăng kích cỡ của tập biến số và tập giá trị của các hàm.

Đại số tuyến tính đã luôn nghiên cứu nhiều biến số, nhưng bước chuyển về số chiều ở đây còn triệt để hơn nữa. Ta chuyển từ hữu hạn chiều sang vô hạn chiều, từ không gian vectơ sang không gian Hilbert, với số biến vô hạn. Tất nhiên bước chuyển này có sự trợ giúp của giải tích. Ngoài hàm nhiều biến, ta còn có hàm của hàm, hay phiếm hàm. Đó là các ánh xạ với tập xác định là không gian các hàm số. Tất cả các phiếm hàm nói chung đều có vô hạn biến số, và đó là lý do tại sao ta có tên gọi "giải tích biến phân". Câu chuyện tương tự đang diễn ra với lý thuyết các hàm tổng quát (phi tuyến), một ngành cổ điển nhưng chỉ thực sự trưởng thành trong thế kỷ 20. Đến đây chấm dứt chủ đề thứ hai của tôi.

3. Từ giao hoán sang không giao hoán

Chủ đề thứ ba là bước chuyển từ giao hoán sang không giao hoán. Đây có lẽ là một trong những đặc tính nổi bật nhất của toán học, đặc biệt là đại số, thế kỷ 20. Khía cạnh không giao hoán của đại số có vai trò vô cùng quan trọng và nguồn gốc của khía cạnh này đến từ toán học thế kỷ 19. Có nhiều lý do dẫn đến đại số không giao hoán. Trong số đó, công trình của Hamilton về quaternion, được thúc đẩy bởi các ý tưởng vật lý, có lẽ là bất ngờ lớn nhất và có một tác động đáng kể. Ngoài công trình của Hamilton, ta có công trình của Grassmann về đại số ngoài, một hệ thống đại số ngày nay đã được tích hợp vào lý thuyết các dạng vi phân. Tất nhiên còn có các điểm nhấn khác như công trình của Cayley về ma trận, dựa trên đại số tuyến tính, và công trình của Galois, dựa trên lý thuyết nhóm.

Tất cả những con đường khác nhau đó tạo thành cơ sở cho việc đưa vào phép nhân không giao hoán, một thứ công cụ cần thiết như cơm gạo của ngành đại số thế kỷ 20. Tuy không làm chúng ta ngày nay bận tâm nữa, những phát kiến kể trên, theo mỗi cách riêng, là những bước đột phá vĩ đại trong thế kỷ 19. Tất nhiên, việc áp dụng các bước tiến đó đến khá bất ngờ theo những con đường khác nhau. Việc áp dụng ma trận và phép nhân không giao hoán vào vật lý xuất phát từ vật lý lượng tử. Các hệ thức giao hoán tử Heisenberg là ví dụ quan trọng hàng đầu của một áp dụng đáng kể của đại số không giao hoán vào vật lý, các hệ thức này sau đó được von Neumann mở rộng trong lý thuyết đại số toán tử.

Lý thuyết nhóm cũng là một khía cạnh nổi bật của thế kỷ 20, tôi sẽ quay lại với lý thuyết nhóm dưới đây.

4. Từ tuyến tính sang phi tuyến

Chủ đề tiếp theo của tôi là bước chuyển từ tuyến tính sang phi tuyến. Một phần lớn của toán học cổ điển cơ bản là tuyến tính, hoặc tựa tuyến tính, được nghiên cứu bằng một loại mở rộng nhiễu loạn nhỏ (pertubation expansion)[4]. Những hiện tượng thực sự phi tuyến phức tạp hơn nhiều, và chỉ được nghiên cứu cặn kẽ vào thế kỷ này.

Câu chuyện bắt đầu với hình học: hình học Euclid, hình học của mặt phẳng, không gian, các đường thẳng; tiếp đến giai đoạn của hình học phi Euclid và hình học tổng quát hơn của Riemann, nơi các đối tượng là phi tuyến một cách căn bản. Trong phương trình vi phân, việc nghiên cứu nghiêm túc các hiện tượng phi tuyến đã đưa đến một loạt các hiện tượng mới không hề xuất hiện trong lý thuyết phương trình vi phân cổ điển. Chỉ cần nói đến soliton và nhiễu loạn, hai khía cạnh rất khác nhau trong phương trình vi phân nhưng đều trở nên rất quan trọng và phổ biến trong thế kỷ này. Chúng đại diện cho những thái cực khác nhau.

[4] Có thể Atiyah muốn nói đến phép lấy vi phân cấp một, về cơ bản là một cách xấp xỉ tuyến tính.

Soliton đại diện cho những dáng điệu đều đặn bất ngờ của các phương trình vi phân phi tuyến, còn nhiễu loạn đại diện cho những dáng điệu không đều đặn bất ngờ. Cả hai đều hiện hữu trong những khu vực khác nhau, cả hai đều thú vị và quan trọng, nhưng đặc biệt cả hai đều là những hiện tượng phi tuyến một cách căn bản. Ta cũng có thể tìm ra dấu vết của soliton trong những công trình ở cuối thế kỷ 19, nhưng đó là những dấu hiệu tương đối mờ nhạt.

Trong vật lý, dĩ nhiên các phương trình Maxwell, nền tảng của điện từ học, là các phương trình vi phân đạo hàm riêng tuyến tính. Tương ứng với chúng là các phương trình Yang-Mills, những phương trình phi tuyến được kỳ vọng sẽ mô tả những lực liên quan đến cấu trúc vật chất. Các phương trình Yang-Mills là phi tuyến vì chúng có thể xem là phiên bản ma trận của các phương trình Maxwell, và tính không giao hoán của phép nhân ma trận dẫn đến những số hạng phi tuyến trong các phương trình Yang-Mills. Ở đây chúng ta bắt gặp một liên hệ thú vị giữa tính phi tuyến và tính không giao hoán. Tính không giao hoán tạo ra một loại phi tuyến nhất định, và điều này hết sức thú vị và quan trọng.

5. Tương phản hình học/đại số

Cho đến giờ tôi đã chọn ra một số chủ đề tổng quát. Bây giờ tôi muốn nói đến một mối tương phản có lịch sử lâu đời, với nhiều pha giằng co, và qua đó tôi xin đưa ra một số phỏng đoán hay nhận xét khái quát. Ta đang nói đến mối tương phản giữa hình học và đại số. Hình học và đại số là hai trụ cột chính, với lịch sử rất lâu dài trong toán học. Hình học có từ thời văn minh Hy Lạp và trước nữa; đại số có từ thời văn minh Ả Rập và Ấn Độ cổ, cả hai ngành đều có tầm quan trọng căn bản với toán học, nhưng quan hệ giữa chúng không phải luôn hòa thuận.

Hãy nhìn xa hơn vào lịch sử. Hình học Euclid, ví dụ kinh điển về một lý thuyết toán học, vốn có nền móng trực quan vững chắc trước khi Descartes đưa hệ toạ độ vào cái mặt phẳng ngày nay mang tên mặt phẳng Descartes. Phát minh của Descartes là một nỗ lực quy giản tư duy hình học thành các tính toán đại số. Đây là một phát kiến vĩ đại, một đòn giáng mạnh của các nhà đại số vào hình học. Nếu ta so sánh các công trình của Newton và Leibniz trong giải tích, ta thấy chúng thuộc về các truyền thống riêng biệt: Newton về căn bản là một nhà hình học, Leibniz về căn bản là một nhà đại số, và có lý do sâu sắc cho cả hai sự kiện đó. Với Newton, hình học, hay thứ giải tích mà ông khai sáng là một nỗ lực dùng toán học để mô tả các quy luật tự nhiên. Ông quan tâm đến vật lý theo nghĩa rộng, và vật lý diễn ra trong thế giới hình học. Để hiểu cách thức hoạt động của các sự vật, ta phải sử dụng các khái niệm của thế giới vật lý, tức là ta phải tư duy bằng trực quan hình học. Khi Newton xây dựng phép tính vi tích phân, ông muốn đưa nó về dạng thức càng gần với thực tế vật lý càng tốt. Vì thế ông dùng những khái niệm hình học, những khái niệm giúp tiếp cận ý nghĩa vật lý. Ngược lại, Leibniz có một mục đích, một tham vọng lớn lao, biến toàn bộ toán học thành một cỗ máy đại số khổng lồ. Đó là một cách tiếp cận trái ngược hẳn với Newton. Hai ông cũng dùng những ký hiệu khác nhau. Như chúng ta biết, trong cuộc tranh luận giữa Newton và Leibniz, chiến thắng cuối cùng thuộc về các ký hiệu của Leibniz. Chúng ta dùng cách ký hiệu đạo hàm của Leibniz. Tinh thần của cách tiếp cận của Newton vẫn còn đó nhưng nó bị che lấp đi suốt một thời gian dài.

Một trăm năm sau, đến cuối thế kỷ 19, hai tên tuổi lớn xuất hiện là Poincaré và Hilbert. Tôi đã nhắc qua đến họ, và nói một cách đại khái, họ là những người kế tục Newton và Leibniz. Poincaré thiên về tư duy hình học, tôpô, ông sử dụng những ý tưởng hình học, tôpô như những căn cứ chính. Hilbert nghiêng về tư duy trừu tượng; ông muốn tiên đề hoá, trừu tượng hóa, muốn trình bày vấn đề theo cách chặt chẽ, khuôn phép. Rõ ràng họ thuộc về những truyền thống khác nhau, dù phân loại những nhà toán học lớn là chuyện không đơn giản.

Khi chuẩn bị bài thuyết trình này, tôi nghĩ mình nên chọn ra những người kế tục các truyền thống nêu trên từ các tên tuổi ở thời chúng ta. Nói về những nhà toán học đương thời không phải chuyện dễ, biết chọn những ai? Rồi tôi tự nhủ: ai lại thấy phiền khi được đưa vào một danh sách huy hoàng như thế? Nghĩ vậy, tôi bèn chọn ra hai người: Arnol'd như người kế tục truyền thống của Poincaré-Newton, và Bourbaki, theo tôi, là người kế tục nổi tiếng nhất của David Hilbert. Arnol'd thẳng thắn cho cách ông tiếp cận cơ học, và vật lý nói chung, là tiếp cận hình học, tiếp nối truyền thống có từ Newton; mọi tiếp cận khác ở thời giữa Newton và Arnol'd, trừ một số ngoại lệ tương đối như Riemann, đều là sai lầm. Bourbaki cố gắng tiếp tục chương trình hình thức hóa của Hilbert qua việc tiên đề hóa và trừu tượng hóa một phần lớn toán học, và đạt được thành công tương đối. Mỗi cách tiếp cận đều có giá trị riêng nhưng có sự cạnh tranh giữa đôi bên.

Tôi xin được trình bày quan điểm cá nhân về sự khác biệt giữa hình học và đại số. Hình học, dĩ nhiên, là về không gian; không có gì phải bàn cãi. Hướng về khán đài của căn phòng này, tôi nhìn thấy rất nhiều, trong một giây hay một phần trăm giây tôi tiếp thu được một lượng thông tin khổng lồ, và đó không phải là điều ngẫu nhiên. Cấu trúc não bộ chúng ta khiến cho nó rất nhạy bén với hình ảnh. Một chuyên gia về sinh lý học thần kinh bạn tôi cho biết thông tin thị giác chiếm đến 80, 90 phần trăm vỏ não. Có 17 trung tâm khác nhau trên não bộ, mỗi trung tâm chuyên trách một phần khác nhau của hoạt động thị giác: có phần chuyên về hình ảnh đứng, có phần chuyên về hình ảnh nằm ngang, có phần chuyên về màu sắc, góc nhìn, và cuối cùng có những phần chuyên về diễn giải và nắm bắt ý nghĩa. Nắm bắt và thấu hiểu thế giới trước mắt là một phần quan trọng của quá trình tiến hóa. Do đó trực quan hay tri giác về không gian hay là một công cụ đầy sức mạnh, và ta hiểu tại sao hình học lại quan trọng như thế với toán học – không chỉ quan trọng với những đối tượng thuần túy hình học mà cả những đối tượng vốn không thuộc về hình học. Chúng ta đưa những đối tượng như thế về dạng hình học vì qua đó trực giác của chúng ta được vận hành. Trực giác là công cụ mạnh mẽ nhất của con người. Dễ dàng nhận ra điều đó khi ta cố gắng giải thích một vấn đề toán học cho học trò hay đồng nghiệp. Giải thích ta đưa ra dài và khó, nhưng cuối cùng bạn sinh viên chợt hiểu ra vấn đề. Bạn ấy nói gì? "A, em rõ rồi!". Nhìn thấy rõ cũng đồng nghĩa với hiểu, và từ "tri giác" (perception) diễn tả cả hai nghĩa đó. Ít nhất điều này đúng trong tiếng Anh. Một việc thú vị là so sánh hiện tượng này với các ngôn ngữ khác(5). Theo tôi việc bộ não người tiến hóa để thu nhận được một lượng thông tin khổng lồ chỉ qua một thoáng nhìn là

(5)Tiếng Việt cũng có những từ có cả hai sắc thái nghĩa *nhìn thấy* và *hiểu* như "nhận ra". Ví dụ: *nhận ra người quen* nghiêng về hành động nhìn, *nhận ra vấn đề* nghiêng về sự hiểu, phát hiện.

một sự kiện rất quan trọng, và toán học đã tiếp nhận bước tiến đó và hoàn thiện nó.

Mặt khác, (dù có thể bạn chưa từng để ý điều này) đại số chủ yếu liên quan đến thời gian. Dù làm loại đại số nào, ta cũng phải thực hiện một chuỗi các hành động nối tiếp nhau, và sự "nối tiếp nhau" diễn ra trong thời gian. Trong một thế giới tĩnh tại ta không thể hình dung ra đại số nhưng hình học về cơ bản là tĩnh tại. Tôi có thể ngồi yên một chỗ và nhìn, và không có việc gì xảy ra, nhưng tôi vẫn nhìn thấy. Ngược lại, đại số liên quan đến thời gian, vì ta có những phép toán phải thực hiện lần lượt, và điều này không chỉ liên quan đến đại số hiện đại. Bất cứ thuật toán, bất cứ quá trình tính toán nào cũng là một chuỗi các bước kế tiếp nhau, chỉ cần làm việc với máy tính để thấy rõ điều này. Các máy tính hiện tại nhận một chuỗi số 0 và 1 như thông tin đầu vào và cho ra kết quả.

Đại số liên quan đến việc biến đổi trong *thời gian*, còn hình học liên quan đến *không gian*. Đây là hai khía cạnh đối nghịch nhau của thực tại, và chúng đại diện cho hai quan điểm khác nhau trong toán học. Do đó tranh luận trong quá khứ của các nhà toán học về tầm quan trọng của hình học so với đại số là một thảo luận rất quan trọng.

Tất nhiên, không ích lợi gì nếu xem cuộc tranh luận này như cuộc chiến một mất một còn. Hỏi "Nên làm nhà đại số hay làm nhà hình học?" cũng giống như hỏi "Điếc và mù, đằng nào tốt hơn?" Người mù không nhìn được không gian, người điếc không nghe được, và nghe diễn ra trong thời gian. Nói chung, ta muốn có cả hai năng lực.

Trong vật lý, có một sự phân chia gần tương tự giữa khái niệm và thí nghiệm. Vật lý có hai phần: *lý thuyết* – khái niệm, giả định, quy luật, và *dụng cụ thí nghiệm*. Tôi nghĩ khái niệm hiểu theo nghĩa rộng cũng giống như hình học, vì chúng liên quan đến những sự vật trong thế giới thực. Ngược lại, một thí nghiệm gần giống một tính toán đại số. Ta thực hiện một hành động với các bước tuần tự; ta đo một con số nào đó; áp chúng vào các công thức, nhưng những khái niệm cơ bản đằng sau các thí nghiệm là một phần của di sản hình học.

Một cách để đưa mối tương phản giữa đại số và hình học vào ngữ cảnh văn chương hay triết học là nói rằng đại số đối với nhà hình học cũng giống như quà đánh đổi dành cho Faust. Như ta đã biết, trong tác phẩm của Goethe, Faust được con quỷ Mephisto hứa sẽ ban tặng cho bất cứ thứ gì miễn là chấp nhận cho đi linh hồn mình. Đại số là quà treo thưởng quỷ sứ hứa hẹn với nhà toán học. Quỷ sứ bảo: 'Ta sẽ tặng ngươi một cỗ máy vạn năng có thể giúp ngươi trả lời bất kỳ câu hỏi nào. Chỉ cần cho ta linh hồn của ngươi: hãy quên hình học đi, ngươi sẽ sở hữu ngay cỗ máy thần diệu đó.' (Ngày nay, quỷ sứ mang chiếc máy tính ra để treo thưởng!). Tất nhiên ta muốn có cả hai: có lẽ ta sẽ đánh lừa con quỷ, giả vờ bán linh hồn mình đi nhưng vẫn không để mất nó. Tuy thế mối nguy hiểm vẫn tiềm ẩn, vì khi tính toán đại số, về cơ bản ta ngừng tư duy; ta không tư duy theo lối hình học nữa, ta không suy tư về ý nghĩa nữa.

Có thể tôi đang quá hà khắc với các nhà đại số, nhưng nói chung mục đích của đại số luôn là cung cấp một công thức để đưa vào trong máy móc, sau đó chỉ cần bấm nút để nhận được kết quả. Ta lấy một thứ có ý nghĩa; công thức hóa nó; và nhận được một kết quả. Trong cả quá trình đó ta không cần phải suy nghĩ xem những bước đại số trung gian tương ứng với những khái niệm hình học nào. Ta mất đi những nhận thức có thể quan trọng trong những bối cảnh khác. Không nên từ bỏ mọi nhận thức! Một lúc nào đó có thể ta sẽ cần đến chúng. Đấy là ý của tôi khi nói về cuộc đánh đổi của Faust. Tôi biết những điều mình vừa nói nghe rất khiêu khích.

Sự chọn lựa giữa hình học và đại số đã dẫn đến những ngành kết hợp cả hai lĩnh vực đó, và sự phân định đâu là đại số đâu là hình học không dễ dàng và ngây thơ như tôi đã nói. Ví dụ, các nhà đại số thường dùng các lược đồ, hình vẽ. Lược đồ là gì nếu không phải là một sự nhượng bộ đối với trực giác hình học?

6. Các công cụ chung

Cho phép tôi quay trở lại với những chủ đề chung nhưng thay vì đề cập đến nội dung tôi sẽ tập trung vào các kĩ thuật và phương pháp chung của các chủ đề này. Tôi muốn miêu tả một số phương pháp chung đã được áp dụng trong một loạt các ngành. Phương pháp đầu tiên là

Lý thuyết đồng điều. Lý thuyết đồng điều ban đầu là một nhánh của tôpô. Nó xuất hiện trong tình huống sau. Khởi đi từ một không gian tôpô phức tạp, ta muốn trích xuất những thông tin đơn giản bằng cách đếm số các lỗ hổng, hay tổng quát hơn một số loại bất biến cộng tính nào đó. Có thể nói lý thuyết đồng điều cho ta bất biến tuyến tính từ một ngữ cảnh phi tuyến. Về mặt hình học, ta cộng vào và loại ra một số loại chu trình trên một không gian từ đó nhận được cái gọi là nhóm đồng điều của không gian. Được phát minh vào nửa đầu thế kỷ 20, đồng điều là một công cụ đại số căn bản cung cấp thông tin về các không gian tôpô; đồng điều là đại số chắt lọc từ trong hình học.

Đồng điều cũng xuất hiện trong những bối cảnh khác. Một nguồn khác của lý thuyết đồng điều là từ công trình của Hilbert và nghiên cứu về đa thức. Mỗi đa thức là một hàm phi tuyến, nhân các đa thức ta được những đa thức bậc cao hơn. Hilbert đề ra ý tưởng xuất chúng là nghiên cứu các "iđêan", mỗi iđêan gồm các tổ hợp tuyến tính (hữu hạn, với hệ số đa thức) của một hệ đa thức triệt tiêu tại một tập điểm cho trước[(6)]. Ông nghiên cứu các phần tử sinh của một iđêan. Một hệ các phần tử sinh có thể chưa tối giản. Hilbert nghiên cứu các quan hệ tuyến tính giữa các phần tử trong một hệ sinh, rồi lại nghiên cứu các quan hệ tuyến tính giữa một hệ phần tử sinh của các quan hệ tuyến tính vừa tìm được. Mỗi quan hệ tuyến tính như thế được gọi là một xoắn (syzygy), và theo cách đã nói ta nhận được một hệ đa tầng các xoắn. Lý thuyết xoắn của Hilbert là một phương pháp tinh tế để quy một vấn đề phi tuyến – việc nghiên cứu đa thức – về một vấn đề tuyến tính. Về cơ bản, Hilbert tạo ra một hệ thống tinh vi các quan hệ tuyến tính để gói gọn một số thông tin về những đối tượng phi tuyến, các đa thức.

Lý thuyết đại số này rất giống với lý thuyết nhóm đồng điều của không gian tôpô, chúng được pha trộn trong ngành "Đại số đồng điều". Trong hình học đại số, thành tựu kỳ vĩ hàng đầu của những năm 1950 là lý thuyết đối đồng điều bó và các mở rộng sang hình học giải tích được phát triển bởi các nhà toán học Pháp như Leray, Cartan, Serre và Grothendieck. Trong lý thuyết đối đồng điều bó có sự kết hợp các ý tưởng tôpô của Riemann-Poincaré, các ý tưởng đại số

(6)Trước công trình của Hilbert và Noether về iđêan trong một vành đa thức, iđêan trong một vành số đã được Kummer và Dedekind nghiên cứu.

của Hilbert, và một số công cụ giải tích cần thiết.

Lý thuyết đồng điều còn có những ứng dụng khác vượt ra ngoài khuôn khổ đại số. Ta có thể gán cho những đối tượng phi tuyến các nhóm đồng điều, vốn là những đối tượng tuyến tính. Ví dụ có thể thực hiện phép gán như vậy cho các nhóm hữu hạn, hay các đại số Lie. Lý thuyết đồng điều có ứng dụng quan trọng trong số học, thông qua khái niệm nhóm Galois. Như vậy lý thuyết đồng điều là một công cụ mạnh để phân tích nhiều tình huống khác nhau, việc áp dụng một công cụ trong nhiều ngành khác nhau như thế là một đặc trưng của toán học thế kỷ 20.

K-lý thuyết. Có một công cụ khác, rất giống với lý thuyết đồng điều trên nhiều phương diện ở tính ứng dụng rộng rãi và khả năng thâm nhập vào nhiều ngành khác nhau, nhưng xuất hiện muộn hơn. Đó là "K-lý thuyết". K-lý thuyết chỉ xuất hiện vào giữa thế kỷ 20, tuy nguồn gốc cũng có từ khá lâu. K-lý thuyết khá gần gũi với lý thuyết biểu diễn. Nhưng trong khi lý thuyết biểu diễn, chẳng hạn của nhóm hữu hạn, có từ thế kỷ 19, thì K-lý thuyết xuất hiện muộn hơn. Có thể nghĩ như sau về K-lý thuyết: đó là một cách xuất phát từ lý thuyết ma trận, trong đó có phép nhân không giao hoán của các ma trận, và cố gắng xây dựng những bất biến giao hoán hay tuyến tính. Vết, số chiều và định thức là các bất biến giao hoán của lý thuyết ma trận và K-lý thuyết cố gắng làm việc một cách có hệ thống với các bất biến như vậy; do đó K-lý thuyết còn được gọi là "đại số tuyến tính ổn định". Ý tưởng là hai ma trận A và B không giao hoán với nhau sẽ trở thành giao hoán nếu ta đặt chúng vào các khối trực giao nhau trong một ma trận dạng khối với kích thước đủ lớn. Vì không gian càng lớn thì những đối tượng chiều thấp càng dễ dàng di chuyển, theo một cách tương đối ta hy vọng phép chuyển từ ma trận cỡ nhỏ lên ma trận cỡ lớn như vậy sẽ cung cấp cho ta những thông tin hữu ích, và đây là cơ sở cho việc sử dụng kỹ thuật của K-lý thuyết. Giống như trong lý thuyết đồng điều, ta cũng cố gắng trích xuất thông tin tuyến tính từ những tình huống phi tuyến.

Trong hình học đại số, K-lý thuyết, xuất hiện như một thành tựu đáng kể, là sáng tạo của Grothendieck trong ngữ cảnh của lý thuyết bó vừa nhắc đến ở trên. K-lý thuyết cũng liên quan đến công trình của Grothendieck mở rộng định lý Riemann-Roch.

Trong tôpô, Hirzebruch và tôi bắt chước những ý tưởng nói trên trong một ngữ cảnh thuần túy tôpô. Có thể nói, trong khi công trình của Grothendieck liên quan đến công trình của Hilbert về xoắn, công trình của Hirzebruch và tôi chủ yếu liên quan đến công trình của Riemann-Poincaré về đồng điều. Thay vì sử dụng đa thức, chúng tôi sử dụng các hàm liên tục. K-lý thuyết tôpô đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết chỉ số về phương trình đạo hàm riêng elliptic tuyến tính.

Trong một hướng khác, K-lý thuyết đại số, với tiềm năng ứng dụng trong số học, được Milnor, Quillen và nhiều người khác phát triển, và lý thuyết này đã dẫn đến nhiều câu hỏi thú vị.

Trong giải tích hàm, công trình của nhiều người, trong đó có Kasparov, mở rộng K-lý thuyết cho các hàm liên tục sang ngữ cảnh của C*-đại số không giao hoán. Họ các hàm liên tục trên một không gian tạo thành một đại số với phép nhân giao hoán, nhưng một tương tự không giao hoán của đại số này xuất hiện trong những bối cảnh khác, và cách tiếp cận giải tích hàm tỏ ra phù hợp với các câu hỏi đặt ra trong những bối cảnh đó.

Như vậy K-lý thuyết cũng là một địa điểm nơi rất nhiều phần khác nhau của toán học xuất hiện như đối tượng của cùng một hình thức luận đơn giản, tuy trong từng trường hợp riêng, mỗi phần đó đều có những câu hỏi kỹ thuật đặc thù tương đối khó. K-lý thuyết không phải là một công cụ thống nhất; chính xác hơn, nó là một khuôn khổ thống nhất, trong đó các ngành chia sẻ những sự tương tự, những đặc điểm chung.

Phần lớn các thành tựu cổ điển của K-lý thuyết đã được Alain Connes mở rộng sang cho "hình học vi phân không giao hoán"(7).

Đáng chú ý, khi nghiên cứu lý thuyết dây (ý tưởng mới nhất trong vật lý lý thuyết), mới đây Witten đã phát hiện ra những cách thú vị mà K-lý thuyết có thể được sử dụng để hiểu "các đại lượng bảo toàn". Trong khi trước đây người ta tin rằng lý thuyết đồng điều là khuôn khổ tự nhiên để xem xét các đại lượng bảo toàn, giờ đây K-lý thuyết dường như còn đem lại những đáp án tốt hơn.

Nhóm Lie. Một khái niệm có khả năng thống nhất nhiều lĩnh vực chứ không chỉ đơn thuần là một kỹ thuật, đó là nhóm Lie. Nhóm Lie, chủ yếu bao gồm các nhóm trực giao, unita, symplectic, cùng một số nhóm đặc biệt khác, đóng một vai trò rất quan trọng trong toán học thế kỷ 20. Lý thuyết các nhóm Lie cũng khởi nguồn từ thế kỷ 19. Sophus Lie là một nhà toán học Na Uy thế kỷ 19, người cùng Felix Klein và nhiều đồng nghiệp khác phát triển "lý thuyết các nhóm liên tục", theo cách gọi trước đây. Ban đầu, với Klein, lý thuyết các nhóm liên tục là một nỗ lực thống nhất các loại hình học khác nhau: hình học Euclid và phi Euclid. Dù bắt nguồn từ thế kỷ 19, lý thuyết Lie thực sự phát triển vào thế kỷ 20. Lý thuyết Lie có một vai trò thống trị trong thế kỷ 20 trong tư cách một khuôn khổ thống nhất để nghiên cứu nhiều câu hỏi khác nhau.

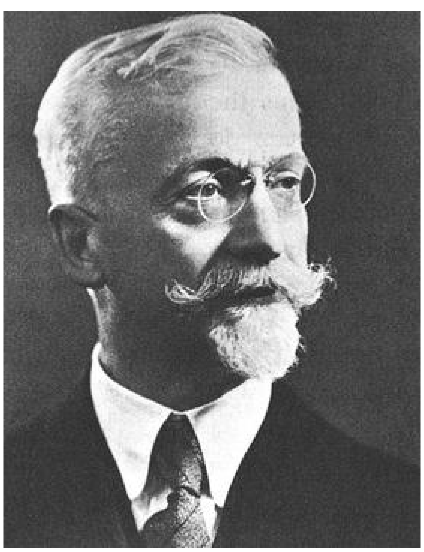
Tôi vừa nhắc đến vai trò của các ý tưởng của Klein đối với hình học. Với Klein, nghiên cứu hình học là nghiên cứu các không gian thuần nhất trong đó bạn có thể di chuyển các đối tượng mà không làm chúng biến dạng, do đó mỗi hình học được xác định bởi một nhóm bảo toàn tương ứng. Nhóm các biến đổi Euclid cho ta hình học Euclid, một nhóm Lie khác cho ta hình học hyperbolic. Mỗi hình học thuần nhất tương ứng với một nhóm Lie nào đó. Nhưng kể từ các công trình về hình học của Riemann, người ta quan tâm hơn đến những không gian hình học không thuần nhất, nơi độ cong thay đổi khi di chuyển từ nơi này đến nơi khác, và không có một phép đối xứng chung cho toàn bộ không gian. Mặt khác, các nhóm Lie vẫn đóng vai trò quan trọng vì chúng xuất hiện ở cấp độ vi mô, vì tại mỗi không gian tiếp xúc, chúng ta có các hệ tọa độ Euclid. Ở cấp độ của không gian tiếp xúc, một cách vi mô, các nhóm Lie tái xuất, nhưng để so sánh các điểm ở các vị trí khác nhau, bạn cần các phép dịch chuyển nhất định để xử lý những nhóm Lie khác nhau. Élie Cartan đã xây dựng lý thuyết về các phép dịch chuyển như vậy, qua đó ông vừa đặt nền móng cho hình học vi phân hiện đại, đồng thời cung cấp khuôn khổ cần thiết cho thuyết tương đối của Einstein. Thuyết tương đối, đến lượt nó, là một tác nhân mạnh mẽ thúc đẩy sự phát triển của toàn bộ hình học vi phân.

Chuyển sang thế kỷ 20, khía cạnh toàn cục của toán học thế kỷ này mà tôi đã nhắc đến, có liên quan đến các nhóm Lie

(7)Tác giả sẽ nhắc đến hình học vi phân không giao hoán ở phần cuối bài viết.

và hình học vi phân toàn cục. Một phát kiến lớn lao, nơi Borel và Hirzebruch có đóng góp tiêu biểu, là nghiên cứu về các "lớp đặc trưng" (characteristic class). Đây là những bất biến tôpô kết hợp ba thành phần nòng cốt: nhóm Lie, hình học vi phân, và tôpô, và đương nhiên một thành phần nữa là cấu trúc đại số của nhóm Lie đã cho.

Theo một hướng khác mang màu sắc giải tích đậm hơn, chúng ta có giải tích điều hòa không giao hoán. Giải tích điều hòa không giao hoán là tổng quát hóa của giải tích Fourier, trong đó các chuỗi Fourier và tích phân Fourier đại khái tương ứng với các nhóm Lie giao hoán của đường tròn và đường thẳng. Thay thế các nhóm Lie giao hoán này bằng các nhóm Lie phức tạp hơn, ta nhận được một lý thuyết đẹp đẽ, tinh xảo kết hợp lý thuyết biểu diễn của nhóm Lie với giải tích. Giải tích điều hòa không giao hoán là thành tựu gần trọn cuộc đời làm toán của Harish-Chandra.



Élie Cartan (1869–1951).
Ảnh: Wikipedia.

Trong số học, toàn bộ "chương trình Langlands", vốn liên hệ gần gũi với giải tích điều hòa của Harish-Chandra, diễn ra trong lý thuyết nhóm Lie. Với mỗi nhóm Lie, ta có một loại số học và chương trình Langlands tương ứng, và chương trình Langlands đã phần nào được hiện thực hóa. Chương trình này tác động đến một phần lớn lý thuyết số đại số trong nửa sau thế kỷ 20. Trong số các tác động này phải kể đến nghiên cứu về các dạng modular cũng như chứng minh định lý Fermat lớn của Andrew Wiles.

Có thể nhầm tưởng rằng nhóm Lie chỉ thực sự quan trọng trong hình học, nơi có những biến đổi liên tục, nhưng ngay trên các trường hữu hạn, các tương tự của nhóm Lie cho ta các nhóm hữu hạn, và hầu hết các nhóm hữu hạn đều xuất hiện như một nhóm kiểu Lie. Do đó một phần kỹ thuật của lý thuyết nhóm Lie cũng áp dụng được ngay cả khi ta làm việc với những đối tượng rời rạc như trường hữu hạn hay trường địa phương. Có rất nhiều công trình thuần túy đại số sử dụng các kỹ thuật tương tự như trong lý thuyết Lie, ví dụ các công trình gắn với tên tuổi của George Lusztig, về biểu diễn của nhóm hữu hạn.

7. Nhóm hữu hạn

Nhân nói về nhóm hữu hạn, điều này gợi tôi nhớ đến việc phân loại các nhóm đơn hữu hạn, và tôi có một lời thú nhận ở đây. Một vài năm trước đây, tôi có được hỏi ý kiến về việc phân loại các nhóm đơn hữu hạn, khi việc này đang sắp kết thúc. Tôi vội vã nói rằng theo tôi công trình phân loại này không phải quá quan trọng gì. Giải thích của tôi lúc đó là định lý phân loại nhóm đơn hữu hạn nói rằng hầu hết các nhóm đơn hữu hạn là những nhóm ta đã biết, và có một danh sách ngoại lệ ít ỏi. Theo nghĩa nào đó định lý phân loại này kết liễu một hướng nghiên cứu, thay vì mở ra những hướng mới. Nếu những cánh cửa đóng lại thay vì mở ra, tôi không thấy quá phấn khích, nhưng đương nhiên một số bạn bè của tôi chuyên về nhóm đơn hữu hạn cảm thấy rất, rất chưng hửng [vì những điều họ được nghe]. Sau bài phỏng vấn đó tôi luôn phải kè kè mang theo một loại áo giáp chống đạn!

Nhưng có một chiếc phao cứu sinh. Tôi quả có nói trong bài phỏng vấn rằng trong danh sách các nhóm "rời rạc" (sporadic groups), nhóm lớn nhất được gọi là "Quỷ". Tôi nghĩ rằng tìm ra nhóm Quỷ là thành tựu lý thú nhất của vấn đề phân loại nhóm đơn hữu hạn. Hóa ra Quỷ là một động vật vô cùng thú vị và vẫn đang được tìm hiểu. Con vật này có những liên hệ bất ngờ đến nhiều lĩnh vực khác trong toán học, với các hàm modular elliptic, hay thậm chí với cả vật lý lý thuyết và lý thuyết trường lượng tử. Đây là những hệ quả thú vị của vấn đề phân loại. Riêng việc phân loại, như nói ở trên, khép cánh cửa lại, nhưng Quỷ lại mở cánh cửa ra.

8. Tác động của vật lý

Tôi xin được chuyển qua một chủ đề khác, tác động của vật lý. Trong suốt lịch sử, vật lý đã có mối liên hệ lâu dài với toán học, và một phần lớn của toán học, ví dụ phép tính vi tích phân, ra đời để giải quyết các bài toán vật lý. Vào giữa thế kỷ 20, mối quan hệ một chiều ấy dường như không còn hiển nhiên nữa, khi phần lớn toán học thuần túy phát triển mạnh độc lập với vật lý, nhưng 25 năm cuối thế kỷ này đã chứng kiến những biến đổi kịch tính. Tôi xin được điểm qua tương tác giữa vật lý với toán học, đặc biệt là với hình học.

Vào thế kỷ 19, Hamilton đưa ra cho cơ học cổ điển hình thức luận ngày nay mang tên ông. Cơ học cổ điển đưa đến loại hình học ngày nay gọi là hình học symplectic. Loại hình học này đã xuất hiện trước đó nhưng chỉ được nghiên cứu nghiêm túc từ hai thập kỷ vừa qua. Hình học symplectic hóa ra là một lĩnh vực rất giàu có. Theo cách hiểu của tôi ở đây, hình học có thể chia làm ba nhánh: hình học Riemann, hình học phức, và hình học symplectic, tương ứng với ba loại nhóm Lie. Trong ba nhánh này, hình học symplectic trẻ trung hơn cả, theo một số cách dường như là nhánh hấp dẫn nhất, và chắc chắn là nhánh hết sức gần gũi với vật lý, vì có nguồn gốc gắn liền với cơ học Hamilton và gần đây hơn là với cơ học lượng tử. Các phương trình Maxwell, các phương trình [vi phân] tuyến tính cơ bản về trường điện từ, đã thúc đẩy công trình của Hodge về các dạng điều hòa (harmonic forms), và ứng dụng trong hình học đại số. Lý thuyết các dạng điều hòa tỏ ra rất hữu ích và làm nền tảng cho phần lớn các công trình hình học từ những năm 1930 đến nay.

Tôi đã nhắc đến tầm quan trọng của thuyết tương đối rộng và công trình của Einstein. Ngoài ra, cơ học lượng tử cũng là một nguồn cảm hứng lớn lao cho toán học. Vai trò quan trọng của cơ học lượng tử không chỉ đến từ các quan hệ giao hoán tử (commutation relations), mà quan trọng hơn từ việc nhấn mạnh vào không gian Hilbert và lý thuyết phổ.

Cụ thể và dễ hiểu hơn, tinh thể học cổ điển nghiên cứu về các đối xứng của các cấu trúc tinh thể. Các nhóm đối xứng hữu hạn chỉ liên quan đến các điểm được nghiên cứu trước hết vì ứng dụng trong tinh thể học. Trong thế kỷ 20, các ứng dụng sâu hơn của lý thuyết nhóm đều có liên hệ với vật lý. Các hạt cơ bản được xem như cấu tạo nên vật chất có những đối xứng ẩn giấu ở cấp độ vô cùng nhỏ, ở đó có tác động của những nhóm Lie không quan sát được, nhưng các đối xứng của các nhóm Lie đó hiện ra rõ ràng khi ta quan sát hành vi của các hạt. Từ đó bạn xây dựng nên một mô hình trong đó đối xứng là thành phần cơ bản, và các lý thuyết vật lý nổi trội nhất ngày nay sử dụng các nhóm Lie $\mathrm{SU}(2)$ và $\mathrm{SU}(3)$ như các nhóm đối xứng nguyên thủy. Theo cách đó các nhóm Lie đóng vai trò vật liệu xây dựng nên thế giới vật chất.

Hơn nữa không phải chỉ những nhóm Lie com-pắc mới xuất hiện trong tự nhiên. Một số nhóm Lie không com-pắc như nhóm Lorentz cũng có mặt trong vật lý. Các nhà vật lý chính là những người đầu tiên nghiên cứu biểu diễn của các nhóm Lie không com-pắc. Các biểu diễn này bắt buộc phải nằm trong không gian Hilbert, vì với các nhóm com-pắc, các biểu diễn bất khả quy đều là hữu hạn chiều, trong khi biểu diễn bất khả quy của các nhóm không com-pắc yêu cầu các không gian vô hạn chiều, và các nhà vật lý là những người phát hiện ra điều này đầu tiên.

Nhà vật lý/toán học Edward Witten (1951 –), huy chương Fields năm 1990. Ảnh: Brigitte Lacombe/www.aip.org.

Trong 25 năm cuối thế kỷ hai mươi chúng ta vừa trải qua, nhiều ý tưởng vật lý đã thâm nhập vào trong toán học. Đây có lẽ là một trong những câu chuyện đáng chú ý nhất của thế kỷ. Cần cả một bài giảng để đi vào chi tiết, nhưng, một cách vắn tắt, lý thuyết trường lượng tử và lý thuyết dây đã được áp dụng một cách đáng chú ý để tạo nên những kết quả, ý tưởng, và kỹ thuật mới trong nhiều phần của toán học. Tôi muốn nói đến việc các nhà vật lý tiên đoán được một số mệnh đề toán học dựa trên những hiểu biết vật lý. Đương nhiên họ không đưa ra những chứng minh chặt chẽ, nhưng họ cung cấp một khối lượng lớn những trực giác, trường hợp riêng và những tương tự sắc bén. Hết lần này đến lần khác, những kết quả do vật lý phỏng đoán đã được các nhà toán học kiểm chứng và xác nhận là đúng về căn bản, mặc dù tìm ra chứng minh không phải việc dễ dàng và nhiều phỏng đoán vẫn chưa được thiết lập hoàn toàn.

Tóm lại các nhà vật lý đã đem lại một nguồn ý tưởng dồi dào trong suốt hai mươi lăm năm qua. Các kết quả họ tiên đoán là hết sức cụ thể. Các nhà vật lý không chỉ nói "những điều đại loại như vậy có thể đúng". Họ nói "công thức chính xác như sau và nó đúng trong mười trường hợp đầu tiên" (các tính toán này liên quan đến các số nhiều hơn 12 chữ số). Họ đưa ra câu trả lời chính xác cho những vấn đề phức tạp đến mức tính nhẩm là việc bất khả; máy móc là không thể thiếu được trong các tính toán như thế. Lý thuyết trường lượng tử tỏ ra là một công cụ đáng chú ý, tuy rất khó nắm bắt về mặt toán học nhưng đem lại những ứng dụng bất ngờ. Đây quả thực là một câu chuyện tuyệt vời trong 25 năm vừa rồi.

Một số gạch đầu dòng có thể vạch ra: công trình của Simon Donaldson về đa tạp bốn chiều; công trình của Vaughan Jones về bất biến của nút; đối xứng gương, nhóm lượng tử; và để hoàn thiện câu chuyện, tôi đã nhắc đến nhóm Quỷ.

Câu chuyện liên quan đến các nhà vật lý tóm lại là gì? Như tôi đã nói, thế kỷ 20 chứng kiến bước chuyển từ số chiều thấp lên số chiều cao hơn, và cuối cùng là số chiều vô hạn. Các nhà vật lý còn đi xa hơn thế. Trong lý thuyết trường lượng tử họ thực sự đang nỗ lực đào sâu vào các không gian vô hạn chiều. Các không gian vô hạn chiều trong vật lý thường là các không gian hàm thuộc nhiều loại. Các không gian ấy phức tạp vì ngoài số chiều vô cùng lớn, chúng có cấu trúc đại số, hình học, và tôpô phức tạp, hơn nữa lại liên quan đến các nhóm Lie cồng kềnh, vô hạn chiều. Giống như việc một phần lớn toán học thế kỷ 20 dành để phát triển hình học, tôpô, đại số, và giải tích trên các nhóm Lie và các đa tạp hữu hạn chiều, một phần của vật lý hướng đến những nghiên cứu tương tự trên các không gian vô hạn chiều, và trong khi là một câu chuyện rất khác, các kết quả hướng nghiên cứu này cung cấp vô cùng ấn tượng.

Cho phép tôi nói rõ hơn một chút. Các lý thuyết trường lượng tử diễn ra trong bối cảnh không và thời gian; và dù không gian vừa nói đến quả thực có ba chiều nhưng cũng có những mô hình giản lược chỉ sử dụng không gian một chiều. Trong không gian một chiều với thời gian một chiều, các nhà vật lý thường bắt gặp những đối tượng tương ứng về mặt toán học với các nhóm như nhóm các vi phôi của đường tròn, hay nhóm các ánh xạ khả vi từ đường tròn vào một nhóm Lie compắc. Hai nhóm vừa kể là hai ví dụ rất căn bản về các nhóm Lie vô hạn chiều xuất hiện trong các lý thuyết trường lượng tử ở một chiều không gian và một chiều thời gian, và các nhóm tương đối đẹp ấy đã được toán học nghiên cứu từ trước.

Trong các lý thuyết trường lượng tử 1+1 chiều, ta có thể coi không-thời gian như một diện Riemann, qua đó các thông tin vật lý mang lại những định lý toán học mới. Ví dụ không gian môđuli của các diện Riemann với giống cho trước đã được toán học nghiên cứu từ thế kỷ 19. Tuy thế lý thuyết trường lượng tử vẫn cung cấp những kết quả mới về đối đồng điều của các không gian moduli này. Một loại không gian moduli tương tự là không gian moduli các G-phân thớ phẳng (flat G-bundle) trên một diện Riemann với giống g. Không gian moduli các G-phân thớ phẳng rất hấp dẫn và lý thuyết trường lượng tử cung cấp các kết quả chính xác về chúng. Cụ thể hơn, ta có những công thức thể tích đẹp đẽ dựa trên giá trị của các hàm zeta.

Một ứng dụng khác của vật lý là đếm số đường cong. Khi quan sát các đường cong đại số trên mặt phẳng với bậc cho trước thuộc một lớp nhất định, một câu hỏi đặt ra là đếm số các đường cong như thế mà đi qua một số điểm cho trước, và câu hỏi này thuộc về các bài toán đếm trong hình học đại số, vốn đã được quan tâm từ thế kỷ 19. Các bài toán đếm trong hình học đại số đều rất khó. Gần đây các bài toán đếm này được giải quyết bằng công cụ hiện đại mang tên "đối đồng điều lượng tử", một phần trong câu chuyện đến từ lý thuyết trường lượng tử, hơn nữa bạn được phép đặt những câu hỏi khó hơn nữa về việc đếm các đường cong nằm trên một đa tạp có độ cong dương. Bằng cách đó bạn đi đến một câu chuyện tuyệt đẹp với những kết quả tường minh trong lý thuyết đối xứng gương. Cuối cùng tất cả đến từ lý thuyết trường lượng tử ở chiều 1+1.

Tiến lên thêm một chiều, ta đến không gian 2 chiều và thời gian 1 chiều, nơi lý thuyết bất biến nút của Vaughan Jones xuất hiện. Công cụ của lý thuyết trường lượng tử giúp ta diễn giải và giải thích một cách tinh tế về các bất biến nút.

Cũng liên quan đến vật lý là các "nhóm lượng tử". Điều lạ lùng nhất về các nhóm lượng tử chính là tên của chúng. Các nhóm lượng tử đều không phải nhóm! Để giải thích định nghĩa của nhóm lượng tử, tôi cần thêm ít nhất nửa tiếng đồng hồ. Đó là những đối tượng phức tạp, nhưng không nghi ngờ gì nữa, các nhóm lượng tử có quan hệ sâu sắc với lý thuyết lượng tử. Các nhóm lượng tử xuất phát từ vật lý và chúng đang được những chuyên gia đại số lành nghề sử dụng trong những tính toán chính xác.

Tiến thêm bước nữa để đến không thời gian bốn chiều (ba cộng một), ta gặp lý thuyết Donaldson về các đa tạp bốn chiều, nơi lý thuyết trường lượng tử có tác động lớn lao. Sử dụng lý thuyết trường lượng tử, Seiberg và Witten đưa ra một giải thích khác về các kết quả của Donaldson, dựa trên nền tảng các trực giác vật lý, họ đưa ra những kết quả toán học kỳ diệu. Câu chuyện chưa dừng lại ở đó. Còn rất nhiều ví dụ khác.

Chúng ta còn có thể kể đến lý thuyết dây, bản thân lý thuyết này cũng dường như sắp lỗi thời! Lý thuyết M dường như mới là lý thuyết tân kỳ nhất, đó là một mảnh đất màu mỡ với một khối lượng lớn khía cạnh toán học liên quan. Các kết quả đến từ lý thuyết M vẫn đang cần được tiêu hóa và sẽ là mối bận tâm của toán học trong một thời gian dài.

9. Tổng kết về lịch sử

Tôi xin đưa ra một tổng kết ngắn. Cho phép tôi nhìn lịch sử trên những đường nét lớn: điều gì đã xảy ra trong toán học từ trước đến nay? Tôi sẽ xuề xòa nhập thế kỷ thứ 18 và 19 vào làm một, và xem đó như giai đoạn toán học cổ điển, giai đoạn có thể gắn với tên tuổi của Euler và Gauss, khi kết quả lớn của toán học cổ điển được tìm ra và phát triển. Tưởng chừng không còn gì để làm trong toán nữa, nhưng rồi thế kỷ 20 đã đạt được rất nhiều thành tựu, và đó là những gì tôi vừa đề cập.

Thế kỷ 20 có thể tạm chia làm hai thời kỳ. Tôi nghĩ rằng ở thời kỳ đầu, xu thế áp đảo có thể gọi là "chuyên môn hóa", trong đó tiếp cận của Hilbert chú trọng đến tiên đề hóa và định nghĩa các khái niệm một cách chính xác, và áp dụng chúng cho thích hợp trong mỗi lĩnh vực cụ thể, có ảnh hưởng rất lớn. Như đã nói, danh tiếng của Bourbaki gắn liền với truyền thống Hilbert, trong đó các nhà toán học tập trung vào những kết quả có thể đạt được trong một hệ thống nhất định, ví dụ một hệ thống đại số, tại một thời điểm nhất định. Ngược lại thời kỳ thứ hai của thế kỷ 20 xu thế áp đảo có thể gọi là "thống nhất hóa", khi các biên giới bị vượt qua, các kỹ thuật được chuyên chở từ lĩnh vực này sang lĩnh vực khác, các đối tượng và các lĩnh vực toán học kết hợp lại ở những kích thước kỳ vĩ. Phép phân chia thời kỳ như trên là một sự giản lược có phần thái quá, nhưng tôi nghĩ cách phân chia đó tóm lược được một số khía cạnh có thể bắt gặp ở toán học thế kỷ 20.

Vậy còn thế kỷ 21? Tôi từng nói thế kỷ 21 có thể là kỷ nguyên của toán học lượng tử, hay toán học vô hạn chiều. Thế nào là toán học lượng tử? Toán học lượng tử là loại tri thức lý tưởng giúp ta hiểu cặn kẽ các khía cạnh giải tích, hình học, tôpô, và đại số của một loạt các không gian hàm phi tuyến, và "hiểu cặn kẽ" nghĩa là hiểu đến mức có thể chứng minh tương đối chặt chẽ tất cả những phỏng đoán đẹp đẽ được các nhà vật lý đưa ra.

Cần phải nói rằng nếu bạn tiếp cận các đối tượng vô hạn chiều một cách ngây thơ [hình thức] và đặt những câu hỏi ngây thơ, bạn sẽ thường nhận được những câu trả lời nếu không sai thì cũng tẻ nhạt. Các ứng dụng, trực giác, và cảm hứng vật lý cho phép các nhà vật lý đặt ra những câu hỏi khôn ngoan về các không gian vô hạn chiều và tiếp cận vấn đề theo cách giúp những câu trả lời có ý nghĩa nảy sinh, và do đó theo nghĩa này làm giải tích vô hạn chiều không phải là việc đơn giản. Bạn cần biết đâu là con đường đúng. Chúng ta có rất nhiều manh mối. Tấm bản đồ đã mở ra: chúng ta biết những điều cần làm, nhưng con đường đến đích vẫn còn xa.

Còn những gì đang chờ đợi ở thế kỷ 21? Tôi muốn nhấn mạnh đến hình học vi phân không giao hoán của Connes. Hình học vi phân không giao hoán của Alain Connes là một lý thuyết có sức mạnh hợp nhất tuyệt diệu. Hình học này kết hợp tất cả mọi thứ lại với nhau. Nó kết hợp giải tích, đại số, hình học, tôpô, vật lý, và số học, mỗi lĩnh vực này đều có phần đóng góp riêng. Hình học vi phân không giao hoán là một khuôn khổ cho phép thực hiện những điều nhà hình học vi phân thường làm, bao gồm cả những liên hệ giữa hình học vi phân với tôpô, trong bối cảnh giải tích không giao hoán. Có nhiều lý do thúc đẩy nghiên cứu hình học vi phân trong bối cảnh giải tích không giao hoán, như những ứng dụng (hay tiềm năng ứng dụng) trong số học, hình học, nhóm rời rạc, cũng như các lĩnh vực toán học khác, và trong vật lý. Một liên hệ thú vị với vật lý mới được tìm ra gần đây. Còn những tương tác nào với vật lý sẽ xuất hiện, hình học vi phân không giao hoán sẽ đạt được những gì, những điều này phải chờ tương lai giải đáp. Đương nhiên tôi kỳ vọng lĩnh vực này sẽ phát triển đáng kể ít nhất trong thập niên đầu của thế kỷ 21, và có lẽ lĩnh vực này có thể liên hệ đến lý thuyết trường lượng tử (chặt chẽ) hiện vẫn đang trong giai đoạn sơ khai.

Theo một hướng khác, cần kể đến "hình học số học" hay hình học Arakelov, nhắm đến thống nhất càng nhiều càng tốt hình học đại số với một phần số học. Hình học số học có rất nhiều thành công. Nó đã có khởi đầu thuận lợi nhưng vẫn còn một chặng đường dài phía trước. Phải thế không?

Tất cả những lĩnh vực vừa kể có những sợi dây liên kết chung. Tôi kỳ vọng vật lý sẽ mở rộng ảnh hưởng của mình ra toàn bộ toán học, kể cả tới số học: Andrew Wiles không nghĩ như vậy và chỉ thời gian mới cho ta biết ai đúng.

Đó là những hướng tôi cảm thấy sẽ nổi lên trong thập kỷ tiếp theo, nhưng còn phải kể đến một loại cầu thủ dự bị: hình học số chiều thấp. Bên cạnh những đối tượng vô hạn chiều thời thượng, hình học số chiều thấp là một nỗi hổ thẹn. Theo rất nhiều cách, những nơi chốn chúng ta và tổ tiên chúng ta xuất phát, vẫn còn là một ẩn số. Chiều "thấp" ở đây hàm ý chiều 2, 3 và 4. Ví dụ, các công trình của Thurston nhắm đến phân loại các hình học có thể trang bị cho các đa tạp ba chiều. Hình học của các đa tạp ba chiều phức tạp hơn hẳn trường hợp hai chiều. Khó có thể nói rằng chương trình Thurston đã hoàn thiện, và việc hoàn thiện chương trình đó là một thách thức to lớn[8].

Một câu chuyện đáng chú ý khác trong không gian ba chiều là công trình của Vaughan Jones với các ý tưởng về căn bản đến từ vật lý. Công trình của Jones cho chúng ta những thông tin về không gian ba chiều gần như trực giao với thông tin

[8]Chương trình Thurston đã được Grigori Perelman hoàn thiện vào năm 2002-2003 qua ba tiền ấn phẩm chứng minh toàn bộ giả thuyết hình học hóa của Thurston, một phần sử dụng các ý tưởng của Richard Hamilton.

đến từ chương trình Thurston. Làm sao kết nối được hai câu chuyện trên với nhau là một thách thức ghê gớm, nhưng gần đây dấu hiệu về một cầu nối khả dĩ đã xuất hiện. Như thế toàn bộ hình học số chiều thấp có những liên hệ với vật lý, nhưng vẫn là hết sức bí ẩn.

Cuối cùng, cũng cần nói rằng trong vật lý các "đối ngẫu" rất hay xuất hiện. Nói một cách khái quát, các đối ngẫu xuất hiện khi một lý thuyết lượng tử xuất hiện dưới hai nhận dạng cổ điển khác nhau. Một ví dụ đơn giản là đối ngẫu giữa vị trí và động lượng trong cơ học cổ điển. Đối ngẫu này biến một không gian thành không gian đối ngẫu, và trong các lý thuyết tuyến tính đối ngẫu đó được cho bởi biến đổi Fourier. Nhưng trong các lý thuyết không tuyến tính một thách thức lớn là tìm ra đối tượng thay thế biến đổi Fourier. Một phần lớn của toán học liên quan đến việc tổng quát hóa các đối ngẫu [cổ điển] cho các tình huống phi tuyến. Các nhà vật lý dường như có khả năng tìm ra các đối ngẫu mới một cách tài tình trong các lý thuyết dây và lý thuyết M. Họ tạo ra hết ví dụ này đến ví dụ khác của các đối ngẫu kỳ diệu có thể xem như các phiên bản phi tuyến vô hạn chiều của biến đổi Fourier, và chúng dường như là những đối ngẫu đúng. Nhưng tìm hiểu các đối ngẫu phi tuyến này có vẻ như một trong những thách thức to lớn dành cho thế kỷ 21.

Tôi nghĩ đã đến lúc dừng lại. Vẫn còn rất nhiều việc cần làm, và quả là điều may mắn cho một ông già như tôi khi được nói chuyện trước những khán giả trẻ trung như các bạn, nhất là khi ông ta có thể nói rằng: còn rất nhiều việc dành cho các bạn trong thế kỷ tới!

Người dịch: Lê Hồng Đăng

Những người đẹp ngủ trong rừng khoa học

Dương Tú(1)

NGHỊCH LÝ EPR

Năm 1935, Einstein cùng hai cộng sự Podolsky và Rosen công bố bài báo *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* trên tạp chí danh tiếng Physical Review. Kết quả chính của bài báo trên sau này thường được gọi là Nghịch lý EPR, viết tắt từ họ của 3 tác giả. Giờ đây, chúng ta biết rằng bài báo chỉ dài vỏn vẹn đúng 4 trang giấy này là công trình hết sức quan trọng trong Vật lý bởi vào thời điểm công bố, nó chỉ ra sự không hoàn chỉnh của cơ học lượng tử thông qua một thí nghiệm tư duy, trong đó cả vị trí lẫn vận tốc của hai hạt cơ bản có tương quan lượng tử với nhau nhưng ở rất xa nhau lại có thể được xác định chính xác bằng cách đo vị trí của hạt này và vận tốc của hạt kia – tình huống vi phạm nguyên lý bất định Heisenberg, một trong những trụ cột của cơ học lượng tử. Chính hiện tượng mà Einstein gọi là ma quái này (spooky action at a distance), cùng với những trao đổi sau đó giữa Einstein với cha đẻ của

(1)Đại học Purdue, Hoa Kỳ.

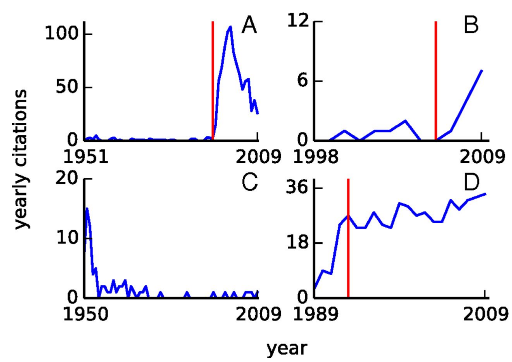
hàm sóng là Schrödinger, đã sản sinh ra những khái niệm như rối lượng tử (quantum entanglement) và con mèo của Schrödinger [1, 2].

"Người đẹp say ngủ"

Mặc dù là công trình của Einstein – người giành giải Nobel 14 năm trước đó, được công bố trên một tạp chí chuyên ngành hàng đầu, về một chủ đề lớn, và tạo ra tranh luận sôi nổi trong giới khoa học, nhưng đáng ngạc nhiên là công trình EPR lại rất ít được trích dẫn. Suốt 6 thập niên sau ngày công bố, bài báo chỉ được nhắc đến khoảng 10 lần mỗi năm. Tuy nhiên, kể từ năm 1994, đặc biệt là những năm đầu thế kỷ 21 khi sự quan tâm dành cho cơ học lượng tử trỗi dậy, số lượng trích dẫn công trình EPR hàng năm tăng vọt lên vài trăm tới hàng ngàn lượt. Tính đến nay, đây là bài báo được trích dẫn nhiều nhất của Einstein với hơn 20 ngàn lượt, theo thống kê của Google Scholar.

Thông thường, các bài báo khoa học hay được trích dẫn trong vòng vài năm kể từ khi công bố, sau đó lượng trích dẫn giảm dần, và mức độ ảnh hưởng của công trình có thể được dự đoán sau 5 năm đầu tiên [3]. Tuy nhiên, có không ít công trình gần như bị lãng quên trong một thời gian dài sau khi công bố rồi bỗng dưng quay lại thu hút sự chú ý mạnh mẽ và nhận được lượng trích dẫn nhiều đột biến như bài báo EPR của Einstein. Các công trình này được Anthony van Raan, chuyên gia trắc lượng khoa học tại Đại học Leiden, Hà Lan đặt tên là những *người đẹp say ngủ* (sleeping beauty) - lấy cảm hứng từ truyện cổ Grimm về nàng công chúa xinh đẹp phải chịu lời nguyền ngủ say một trăm năm cho đến khi một chàng hoàng tử đến đánh thức nàng dậy bằng một nụ hôn [4].

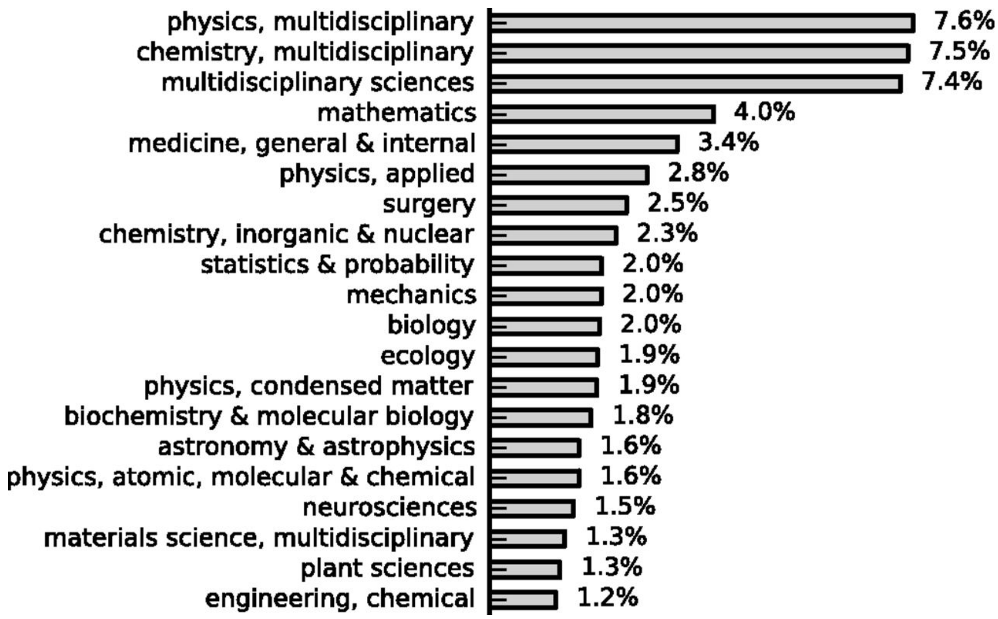
Gần 10 năm sau phân tích của Anthony van Raan trên tạp chí Scientometrics, một nhóm tác giả từ Đại học Indiana, Mỹ do Alessandro Flammini chủ trì đã tiến hành một khảo sát mang tính hệ thống và toàn diện trên hơn 22 triệu bài báo để đi tìm những người đẹp say ngủ này. Các tác giả đề xuất hệ số đẹp (beauty coefficient) dựa trên số lượng trích dẫn của một bài báo và cách mà bài báo thu hút được lượng trích dẫn đó theo thời gian. Một bài báo có số lượt trích dẫn tăng tuyến tính hàng năm có hệ số đẹp bằng 0 trong khi công trình bị lãng quên 100 năm trước khi trở nên nổi tiếng với lượng trích dẫn tăng vọt có thể có hệ số đẹp tới trên 10.000 (Hình 1) [5].



Hình 1. Minh họa sự phụ thuộc của hệ số đẹp B vào lịch sử trích dẫn. Đường thẳng màu đỏ đánh dấu năm "thức giấc". Bài báo A công bố năm 1951, chỉ được trích dẫn ít lần trong những năm đầu, đến 1994 bỗng dưng lượng trích dẫn tăng vọt, đạt đỉnh vào năm 2000. Kết quả là hệ số đẹp rất cao. Bài báo B có xu hướng trích dẫn tương tự bài báo A, nhưng do bài này mới được công bố gần đây nên hệ số đẹp thấp hơn. Bài báo C đạt đỉnh trích dẫn sau năm đầu tiên, B=0. Bài báo D có hệ số đẹp âm.

Phân bố người đẹp say ngủ

Công trình của Flammini và cộng sự trên tạp chí uy tín PNAS [5] cho thấy vài kết quả rất thú vị. Đầu tiên, người đẹp ngủ trong rừng không phải trường hợp cá biệt trong khoa học mà trên thực tế lại tương đối phổ biến. Đồng thời, một số lĩnh vực có mật độ người đẹp say ngủ cao hơn các lĩnh vực khác. Thật vậy, vật lý, hóa học và toán học là 3 lĩnh vực sản sinh ra nhiều người đẹp say ngủ nhất, bên cạnh những lĩnh vực nghiên cứu đa ngành (Hình 2).



Hình 2. Danh sách 20 lĩnh vực có nhiều người đẹp say ngủ, chỉ tính trong số những bài báo có hệ số đẹp thuộc nhóm 0,1% cao nhất trong toàn bộ cơ sở dữ liệu của Web of Science.

Bảng 1. Danh sách 15 người đẹp say ngủ có hệ số đẹp cao nhất trong khoa học, tính đến tháng 7/2021.

B	Author(s)	Title	Publication, awakening year	Journal	Field
11,600	Freundlich, H	Concerning adsorption in solutions	1906, 2002	*Z Phys Chem*	Chemistry
10,769	Hummers, WS Offeman, RE	Preparation of graphitic oxide	1958, 2007	*J Am Chem Soc*	Chemistry
5,923	Patterson, AL	The Scherrer formula for X-ray particle size determination	1939, 2004	*Phys Rev*	Physics
5,168	Cassie, ABD Baxter, S	Wettability of porous surfaces	1944, 2002	*Trans Faraday Soc*	Chemistry
4,273	Turkevich, J Stevenson, PC Hillier, J	A study of the nucleation and growth processes in the synthesis of colloidal gold	1951, 1997	*Discuss Faraday Soc*	Chemistry
3,978	Pearson, K	On lines and planes of closest fit to systems of points in space	1901, 2002	*Philos Mag*	Statistics
3,892	Stoney, GG	The tension of metallic films deposited by electrolysis	1909, 1989	*Proc R Soc Lond A*	Physics
3,560	Pickering, SU	CXCVI.–Emulsions	1907, 1998	*J Chem Soc, Trans*	Chemistry
2,962	Wenzel, RN	Resistance of solid surfaces to wetting by water	1936, 2003	*Ind Eng Chem*	Chemistry
2,736	Wilson, EB	Probable inference, the law of succession, and statistical inference	1927, 1999	*J Am Statist Assoc*	Statistics
2,671	Langmuir, I	The constitution and fundamental properties of solids and liquids. Part I. Solids	1916, 2003	*J Am Chem Soc*	Chemistry
2,584	Moller, C; Plesset, MS	Note on an approximation treatment for many-electron systems	1934, 1982	*Phys Rev*	Physics
2,573	Pugh, SF	Relations between the elastic moduli and the plastic properties of polycrystalline pure metals	1954, 2005	*Philos Mag*	Metallurgy
2,258	Einstein, A Podolsky, B Rosen, N	Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?	1935, 1994	*Phys Rev*	Physics
2,184	Washburn, EW	The dynamics of capillary flow	1921, 1995	*Phys Rev*	Physics

Những tạp chí như Nature, Science, PNAS thường công bố các công trình nghiên cứu tiên phong, đi trước thời đại nên không hiếm khi một công trình sau nhiều năm trời mới được chú ý đến - có thể bởi những tác giả thuộc những lĩnh vực hoàn toàn mới. Chẳng hạn một số bài báo về thống kê toán học trở nên nổi tiếng và được trích dẫn nhiều sau khi các phương pháp thống kê trở nên hữu ích trong phân tích dữ liệu y sinh.

Mười lăm người đẹp say ngủ có hệ số đẹp cao nhất được lọc ra từ hơn 22 triệu bài báo thuộc đủ mọi lĩnh vực trong khung thời gian hơn một thế kỷ (Bảng 1) nay đều đã trở thành những công trình kinh điển và quen thuộc với nhiều người. Ngoài bài báo về Nghịch lý EPR của Einstein đứng ở vị trí 14, ta còn dễ dàng nhận ra ở vị trí thứ 6 là công trình *On lines and planes of closest fit to systems of points in space* nổi tiếng của Karl Pearson, cha đẻ của toán thống kê, xuất bản từ năm 1901 trên tạp chí Philosophical Magazine. Sau hơn 100 năm bị lãng quên, bài báo của Pearson mới bắt đầu được chú ý rộng rãi với gần 13 ngàn lượt trích dẫn tính đến nay. Với giấc ngủ kéo dài cả thế kỷ tương tự như công trình của Pearson, bài báo của nhà hóa học người Đức Herbert Freundlich về hiện tượng hấp phụ trong dung dịch công bố năm 1906 trên tạp chí Zeitschrift für Physikalische Chemie chỉ mới trở thành kinh điển gần đây, thu hút hơn 7 ngàn lượt trích dẫn, đứng dầu danh sách người đẹp ngủ trong rừng.

"Người đẹp say ngủ" trong ngành Toán

Đứng đầu danh sách người đẹp say ngủ của ngành Toán (Bảng 2) là công trình *The homogeneous chaos* của nhà toán học Mỹ Norbert Wiener – người được xem là cha đẻ của điều khiển học – đăng tải trên tạp chí American Journal of Mathematics năm 1938. Công trình về giải tích điều hòa trong không gian Wiener có liên quan chặt chẽ với lý thuyết trường lượng tử Bose-Einstein này phải ngủ một giấc dài tới hơn 60 năm mới được đánh thức vào đầu những năm 2000, đến nay đã thu hút hơn 3000 lượt trích dẫn.

Nhưng đây chưa phải người đẹp có giấc ngủ dài nhất trong Toán học. Thật vậy, phải mất hơn 100 năm, bài báo tiếng Đức *Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen* của nhà toán học Alfred Pringsheim công bố năm 1900 trên Mathematische Annalen mới bắt đầu được cộng đồng toán học chú ý. Một giấc ngủ khác ngắn hơn một chút nhưng cũng kéo dài đúng một thế kỷ là công trình viết bằng tiếng Pháp *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes* của nhà toán học Đan Mạch Johan Jensen đăng tải năm 1906 trên Acta mathematica. Bài báo về các hàm lồi gắn liền với bất đẳng thức Jensen nổi tiếng đến nay đã được trích dẫn tới gần 2000 lần này mới được đánh thức cách đây hơn 15 năm(2).

Danh sách người đẹp say ngủ ngành Toán còn có những cái tên quen thuộc khác như công trình *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace* của nhà toán học Pháp Jean Leray công bố năm 1934 trên Acta Mathematica về

(2)Từ ví dụ này, ta thấy "người đẹp say ngủ" không phải lúc nào cũng là một kết quả cách mạng cần hàng trăm năm mới có người hiểu. Bất đẳng thức Jensen là tương đối sơ cấp, và học sinh giỏi toán Việt Nam cũng đã biết đến bất đẳng thức này từ lâu, ví dụ từ sách của Phan Huy Khải, xuất bản năm 2001. (Chú thích của BBT) các nghiệm yếu của phương trình Navier-Stokes; hay công trình quan trọng nhất của nhà toán học Hungary Alfréd Haar viết bằng tiếng Đức *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme* công bố năm 1910 trên Mathematische Annalen; và bài báo khá gần đây *Mean value methods in iteration* của nhà toán học Mỹ William Mann đăng tải năm 1953 trên Proceedings of the American Mathematical Society. Mỗi "người đẹp" này đều thu hút trên 3000 lượt trích dẫn sau những giấc ngủ dài không dưới nửa thế kỷ.

Bảng 2. Danh sách 10 người đẹp say ngủ có hệ số đẹp cao nhất trong Toán học, tính đến tháng 7/2021.

B	Author	Title	Pub., awake	Journal
1215	Wiener, N	The homogeneous chaos	1938, 2001	Amer. J. Math.
1060	Leray, J	On the movement of a viscous fluid to fill the space	1934, 1995	Acta Math.
851	Pringsheim, A	On the theory of the double infinite numerical orders	1900, 2005	Math. Ann.
765	Jensen, JLWV	On the convex functions and inequalities between mean values	1906, 2006	Acta Math.
706	Mann, WR	Mean value methods in iteration	1953, 2004	Proc. Am. Math. Soc.
670	Halpern, B	Fixed points of nonexpanding maps	1967, 2004	Bull. Amer. Math. Soc.
669	Haar, A	On the theory of orthogonal function systems (first announcement)	1910, 1988	Math. Ann.
609	Weyl, H	The asymptotic dispersal law of eigen values of linear partial equations differential (with an application for the theory of cavity radiation)	1912, 2002	Math. Ann.
578	Painleve, P	About second order and higher order differential equations whose general integral is uniform	1902, 1990	Acta Math.
558	Schmidt, E	On the theory of linear and non-linear integral equations chapter i development of random functions in specific systems	1907, 1992	Math. Ann.

"HOÀNG TỬ"

Câu hỏi hiển nhiên được đặt ra: ai là hoàng tử đã khiến những người đẹp này thức giấc? Bằng cách phân tích những bài báo trích dẫn các công trình mới đầu bị lãng quên ngay trước và sau khi chúng tỉnh dậy, nhóm tác giả từ Đại học Indiana có thể xác định được những chàng hoàng tử này.

Một thí dụ là bài báo công bố năm 1955 trên Science *Citation indexes for science: a new dimension in documentation through association of ideas* của Eugene Garfield - một trong những người sáng lập ngành trắc lượng khoa học (scientometrics) và ISI (Institute for Scientific Information), cha đẻ của Journal Citation Reports và hệ số ảnh hưởng (impact factor). Công trình này ngủ quên suốt gần 50 năm cho đến khi được đánh thức bởi các công bố sau đó của cùng tác giả, chẳng hạn công trình *The history and meaning of the journal impact factor* xuất bản năm 2006 trên tạp chí uy tín JAMA.

Các bài báo này, đến lượt chúng, lại được trích dẫn bởi những công trình khác có tác động lớn như bài báo năm 1999 của Kleinberg về thuật toán tìm kiếm dựa vào siêu liên kết HITS (hyperlink-induced topic search) trên Journal of the ACM, được xem như công trình tiên phong trong khoa học mạng lưới, và bài báo *Why the impact factor of journals should not be used for evaluating research* năm 1998 của Seglen trên tạp chí BMJ về những hạn chế của hệ số ảnh hưởng, khơi mào cuộc tranh luận vẫn còn đang tiếp diễn về việc sử dụng các dữ liệu trắc lượng thư mục trong đánh giá nghiên cứu.

Thí dụ thứ hai là công trình *Information flow model for conflict and fission in small groups* của Wayne Zachary xuất bản năm 1977 trên Journal of Anthropological Research, về sự xung đột và tan rã của các nhóm cộng đồng nhỏ, cụ thể là của một câu lạc bộ võ thuật ở một trường đại học gồm hơn 30 thành viên. Bài báo của Zachary xếp thứ 3 danh sách người đẹp say ngủ trong lĩnh vực Khoa học Xã hội và Nhân văn. Công trình này hầu như bị lãng quên suốt gần 30 năm cho đến khi Michelle Girvan và Mark Newman sử dụng mô hình của Zachary trong bài báo có ảnh hưởng rất lớn mang tên *Community structure in social and biological networks* đăng trên PNAS năm 2002.

* * *

Những khám phá trên đây về các người đẹp say ngủ có ý nghĩa gì? Ở khía cạnh trắc lượng khoa học, chúng cho thấy việc sử dụng các chỉ số trích dẫn ngắn hạn để đánh giá ảnh hưởng của một công trình khoa học có thể không chính xác. Quan trọng hơn, về mặt tinh thần, chúng có giá trị an ủi lớn, giúp nhiều nhà nghiên cứu không vội nản chí khi các bài báo mãi vẫn chưa được chú ý và trích dẫn. Một ngày đẹp trời nào đó, biết đâu "hoàng tử" sẽ đến đánh thức "người đẹp say ngủ" của chúng ta dậy bằng một nụ hôn ngọt ngào?

TÀI LIỆU

[1] Maldacena, J. *Geometría y entrelazamiento cuántico*, Investigación y Ciencia (2015). Bản dịch tiếng Việt của GS. Đàm Thanh Sơn: https://damtson.wordpress.com/2015/1-1/29/geometria-y-entrelazamiento-cuantico/.

[2] Kaiser, D., *How Einstein and Schrödinger conspired to kill a cat*, Nautilus Magazine, https://nautil.us/issue/41/selection/how-einstein-and-schrdinger-conspired-to-kill-a-cat

[3] Van Noorden, R. *Formula predicts research papers' future citations*. Nature (2013).

[4] van Raan, A.F.J. *Sleeping Beauties in science*. Scientometrics 59 (2004).

[5] Ke, Qing, et al., *Defining and identifying sleeping beauties in science*, Proceedings of the National Academy of Sciences 112 (24) (2015).

Lý thuyết trò chơi tiến hóa: toán học trong quá trình tiến hóa và các hành vi tập thể

Hàn Thế Anh(1)

Bài báo thảo luận về lý thuyết trò chơi tiến hóa như một công cụ toán học mạnh mẽ và thống nhất để nghiên cứu sự tiến hóa của các hành vi tập thể. Chúng tôi tóm lược một số hướng nghiên cứu gần đây áp dụng các phương pháp trong lý thuyết trò chơi tiến hóa, bao gồm i) phân tích các đặc trưng thống kê của số lượng các điểm cân bằng (ổn định) trong một trò chơi tiến hóa ngẫu nhiên, và ii) mô hình hóa quá trình tiến hóa của các hành vi an toàn và rủi ro được đặt ra bởi các công nghệ Trí

(1)Đại học Teesside, Vương quốc Anh. *Email*: T.Han@tees.ac.uk

tuệ nhân tạo tiên tiến trong cuộc chạy đua công nghệ. Cuối cùng, bài báo thảo luận về triển vọng cũng như một số gợi ý cho các nhà nghiên cứu trong tương lai.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Các cơ chế hình thành và tiến hóa của hành vi tập thể giữa các cá thể trừu tượng, kèm theo đó là các chiến lược hành vi đa dạng, đã được nghiên cứu dưới góc độ toán học thông qua Lý thuyết trò chơi tiến hóa [Now06]. Chúng từ lâu đã luôn thu hút mối quan tâm từ nhiều lĩnh vực khác nhau như sinh học, kinh tế học, vật lý, khoa học máy tính và khoa học xã hội. Nghiên cứu thuộc các lĩnh vực này có thể hệ thống hóa bởi các kỹ thuật mô phỏng, từ đó cho phép tìm hiểu về các cơ chế nói trên dưới nhiều điều kiện, tham số và các trò chơi ảo thay thế. Các kết quả lý thuyết và thực nghiệm liên tục tạo bất ngờ, có triển vọng và đầy hứa hẹn. Việc giải thích (một cách chặt chẽ) quá trình tiến hóa của hành vi hợp tác được tạp chí Science đánh giá là một trong 125 câu hỏi quan trọng nhất mà các lĩnh vực khoa học gặp phải [Pen05].

Lý thuyết trò chơi tiến hóa (Evolutionary Game Theory - EGT) đã trở thành một công cụ toán học mạnh mẽ được dùng để mô hình hóa và phân tích các hệ thống sinh học, kinh tế và văn hóa phức tạp bất cứ khi nào có sự lựa chọn phụ thuộc vào tần số - khi mức độ thích ứng của một cá thể không chỉ phụ thuộc vào chiến lược của nó, mà còn phụ thuộc vào cấu trúc của quần thể được đặt trong mối liên hệ với (các) chiến lược khác [HS98]. Kết cục (payoff) của các trò chơi được hiểu là mức độ thích ứng của từng cá thể, một cách hoàn toàn tự nhiên sẽ cần tới phương pháp tiếp cận dựa trên quá trình thay đổi theo thời gian. EGT ra đời vào năm 1973 từ lý thuyết của John Maynard Smith và George R. Price về sự cạnh tranh trong thế giới động vật, mở rộng lý thuyết trò chơi cổ điển [VNM44] để đưa ra các tiêu chí toán học sử dụng trong việc dự đoán kết quả tiến hóa của sự tác động giữa các chiến lược cạnh tranh với nhau [MSP73].

Kể từ khi ra đời, EGT đã được sử dụng rộng rãi và thành công trong việc nghiên cứu nhiều câu hỏi quan trọng và đầy thách thức mà nhiều ngành và tổ chức xã hội phải đối mặt, chẳng hạn như: Những cơ chế nào là cơ sở tiến hóa của hành vi hợp tác ở các cấp tổ chức khác nhau (từ gen đến xã hội loài người) [Now06]? Làm thế nào để giảm thiểu các rủi ro tiềm ẩn, chẳng hạn như rủi ro gây ra bởi biến đổi khí hậu [SP11] hoặc công nghệ tân tiến của Trí tuệ nhân tạo (AI) [HPSL20]? Vai trò của nhận thức và cảm xúc trong quá trình tiến hóa hành vi là gì [Han13]?

Nhiều cách tiếp cận và phương pháp toán học đa dạng phục vụ cho việc phân tích các mô hình EGT đã được phát triển trong những năm vừa qua. Chúng bao gồm các phương pháp tiếp cận liên tục như phương trình tái tạo với giả thiết dân số đủ lớn, đòi hỏi cần phân tích các hệ phương trình vi phân [HS98]. Đối với các hệ hữu hạn, chúng ta cần áp dụng những phương pháp tiếp cận ngẫu nhiên và thường phải dùng tới các phương pháp xấp xỉ (ví dụ phương pháp phân tích trường trung bình). Ở đây, các mô phỏng máy tính và những phương pháp từ vật lý thống kê, chẳng hạn như mô phỏng Monte Carlo, rất hữu ích cho việc phân tích các hệ thống có độ phức tạp cao mà khó thu được kết quả giải tích, ví dụ, khi các quần thể được phân bố trên mạng phức tạp [PJR$^+$17].

Dưới đây, chúng ta sẽ tìm hiểu một số ví dụ từ các công trình gần đây để minh họa các ứng dụng đa dạng của phương pháp

EGT trong việc tìm hiểu về quá trình tiến hóa hành vi và sinh học.

2. Áp dụng lý thuyết đa thức ngẫu nhiên để phân tích đặc trưng của các điểm cân bằng trong trò chơi tiến hóa ngẫu nhiên

Các trò chơi tiến hóa ngẫu nhiên, trong đó các phần tử kết cục là các biến ngẫu nhiên, đã được sử dụng rộng rãi để mô hình hóa các hệ thống sinh học và xã hội mà thông tin có sẵn bị hạn chế, hoặc ở trong môi trường thay đổi nhanh chóng và thường xuyên đến mức người ta không thể mô tả được kết cục từ tương tác giữa các dân cư [HTG12, DH16, GT10, DTH19]. Các điểm cân bằng của những hệ thống tiến hóa này là hợp của tần suất đưa ra các chiến lược với mức độ thích ứng trung bình như nhau. Về mặt sinh học, chúng dự đoán sự cùng tồn tại của các loài khác nhau trong một quần thể và sự duy trì hiện tượng đa hình.

Trong các trò chơi ngẫu nhiên, do tính ngẫu nhiên của các phần tử kết cục, chúng ta cần nghiên cứu đặc trưng thống kê của các điểm cân bằng. Cách xác định phân phối của các điểm cân bằng trong các trò chơi tiến hóa ngẫu nhiên là một chủ đề được nghiên cứu chuyên sâu với nhiều phân nhánh thực tiễn trong ngành sinh thái học, di truyền học quần thể, khoa học xã hội, kinh tế học và khoa học máy tính, cung cấp hiểu biết cơ bản về độ phức tạp trong một hệ động lực, chẳng hạn như đa dạng hành vi, văn hóa hoặc sinh học và sự duy trì tính đa hình. Các đặc trưng của điểm cân bằng, đặc biệt là xác suất quan sát được số điểm cân bằng tối đa, tính ổn định và khả năng đạt các quy luật trong chiến lược ổn định tiến hóa đã được nghiên cứu [GT10, HTG12]. Tuy nhiên, vì những công trình trước đây sử dụng phương pháp tiếp cận trực tiếp trong đó bắt buộc giải hệ phương trình đa thức, nên việc phân tích toán học hầu như chỉ giới hạn trong các trò chơi tiến hóa với một lượng nhỏ người chơi, do không thể giải các phương trình đa thức bậc cao trong trường hợp tổng quát (theo Định lý Abel–Ruffini).

Những công trình gần đây của chúng tôi phân tích các trò chơi tiến hóa ngẫu nhiên với số lượng người chơi tùy ý [DH16, DTH19]. Kỹ thuật quan trọng mà chúng tôi phát triển là liên hệ số điểm cân bằng trong một trò chơi tiến hóa với số nghiệm thực của một hệ các đa thức ngẫu nhiên nhiều biến [EK95]. Giả sử chúng ta muốn xét các trò chơi tiến hóa với d người chơi và n chiến lược, thì hệ gồm $n-1$ phương trình đa thức bậc $d-1$:

$$\sum_{\substack{0\leq k_i\leq d-1,\\ \sum_{i=1}^{n-1} k_i\leq d-1}} \beta^i_{k_1,\ldots,k_{n-1}} \binom{d-1}{k_1,\ldots,k_n} \prod_{i=1}^{n-1} y_i^{k_i} = 0,$$

với $i=1,\ldots,n-1$. Ở đây, $\beta^i_{k_1,\ldots,k_{n-1}} := \alpha^i_{k_1,\ldots,k_n} - \alpha^n_{k_1,\ldots,k_n}$, trong đó $\alpha^{i_0}_{k_1,\ldots,k_n} := \alpha^{i_0}_{i_1,\ldots,i_{d-1}}$ là kết cục của những người chơi chọn chiến lược tiêu điểm và k_i, $1\leq i\leq n$, là số lượng người chơi chọn chiến lược i trong $\{i_1,\ldots,i_{d-1}\}$, với $\sum_{i=1}^n k_i = d-1$. Trong [DH16], chúng tôi phân tích giá trị kỳ vọng $E(n,d)$ và mật độ $f(n,d)$ của các điểm cân bằng đối nội trong một trò chơi tiến hóa tổng quát với n chiến lược và d người chơi, khi kết cục của các cá thể là độc lập và tuân theo phân phối chuẩn. Chúng tôi cung cấp các công thức tính toán có thể thực hiện được ứng với các đại lượng này trong trường hợp tổng quát và tìm các đặc trưng cho dáng điệu tiệm cận của chúng đối với các trò chơi gồm hai chiến lược (tức là của $E(2,d)$ và

$f(2,d)$), ước lượng giới hạn dưới và giới hạn trên của chúng khi d tăng. Ví dụ, dưới một số ràng buộc nhất định đối với kết cục, chúng ta thu được các kết quả sau.

- Dáng điệu tiệm cận của $E(2,d)$:

  $\sqrt{d-1} \lesssim E(2,d) \lesssim \sqrt{d-1}\ln(d-1).$

  Ta có hệ quả:

  $$\lim_{d\to\infty} \frac{\ln E(2,d)}{\ln(d-1)} = \frac{1}{2}.$$

- Công thức tường minh của $E(n,2)$: $E(n,2) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Đối với trò chơi tổng quát gồm n chiến lược và d người chơi, dựa trên các phân tích số mở rộng, chúng tôi đưa ra một phỏng đoán liên quan đến các dáng điệu tiệm cận của $E(n,d)$ và $f(n,d)$. Chúng tôi cũng chỉ ra rằng xác suất quan sát được số lượng điểm cân bằng lớn nhất có thể hội tụ về không khi d hoặc n tiến ra vô cùng, và giá trị kì vọng của số lượng điểm cân bằng ổn định bị chặn trong một khoảng nhất định.

Trong [DTH18], chúng tôi tổng quát hóa phân tích của mình cho các trò chơi tiến hóa ngẫu nhiên mà trong đó phần tử của ma trận kết cục là các biến ngẫu nhiên *có tương quan*. Trong nhiều bối cảnh xã hội và sinh học, các mối tương quan có thể nảy sinh từ nhiều tình huống khác nhau, đặc biệt là khi có yếu tố ngẫu nhiên từ môi trường và sự không chắc chắn trong tương tác, chẳng hạn như khi những đóng góp của cá thể có tương quan với bối cảnh xung quanh (ví dụ như do nguồn lực hạn chế). Chúng tôi thiết lập một công thức có dạng đóng cho giá trị trung bình của số điểm cân bằng đối nội (ổn định) và đặc trưng cho dáng điệu tiệm cận của đại lượng quan trọng này với quy mô nhóm lớn và nghiên cứu ảnh hưởng của hệ số tương quan. Kết quả cho thấy việc giảm hệ số tương quan giữa các kết cục (cụ thể là của một nhà chiến lược cho các cấu trúc nhóm khác nhau) làm tăng giá trị trung bình của số lượng điểm cân bằng (ổn định), từ đó có thể đưa ra phỏng đoán là sự đa dạng về hành vi của một hệ thống hoặc quần thể có thể được thúc đẩy bằng cách tăng tính độc lập của các các phần tử kết cục.

Để mở rộng kết quả đã thu được, trong [DTH19], chúng tôi đưa ra một công thức dạng đóng cho phân phối của các điểm cân bằng đối nội cho cả các phân phối chuẩn và phân phối đều của phần tử kết cục trong trò chơi. Chúng tôi cũng nêu một số ước lượng cho giới hạn trên và giới hạn dưới toàn cục của xác suất đạt được một số lượng điểm cân bằng đối nội nhất định, và ước lượng này độc lập với phân phối của kết cục. Phân phối của các điểm cân bằng cung cấp thông tin chi tiết hơn về độ phức tạp hoặc số lượng các trạng thái đa dạng sinh học khác nhau có thể xảy ra trong một hệ động lực, so với thông tin thu được từ giá trị kỳ vọng của số lượng các điểm cân bằng đối nội.

Tóm lại, bằng cách kết hợp EGT với lý thuyết đa thức ngẫu nhiên, chúng tôi thu được các kết quả mới về giá trị kỳ vọng của số lượng cũng như phân phối của điểm cân bằng đối nội trong các trò chơi đa chiến lược với nhiều người chơi. Các nghiên cứu của chúng tôi cung cấp những hiểu biết mới về độ phức tạp tổng thể của các hệ động lực, bao gồm cả hệ sinh học và xã hội, khi số lượng người chơi và chiến lược trong một tương tác của hệ thống tăng lên. Vì lý thuyết về đa thức ngẫu nhiên phong phú, chúng tôi hy vọng rằng cách tiếp cận mới này có thể được mở rộng để thu được thêm kết quả cho các mô hình phức tạp hơn về động lực học quần thể như phương trình tái tạo-đột biến và các trò chơi tiến hóa có phản hồi của môi trường.

3. Áp dụng trò chơi tiến hóa để mô hình hóa các hành vi an toàn trong cuộc chạy đua Trí tuệ nhân tạo

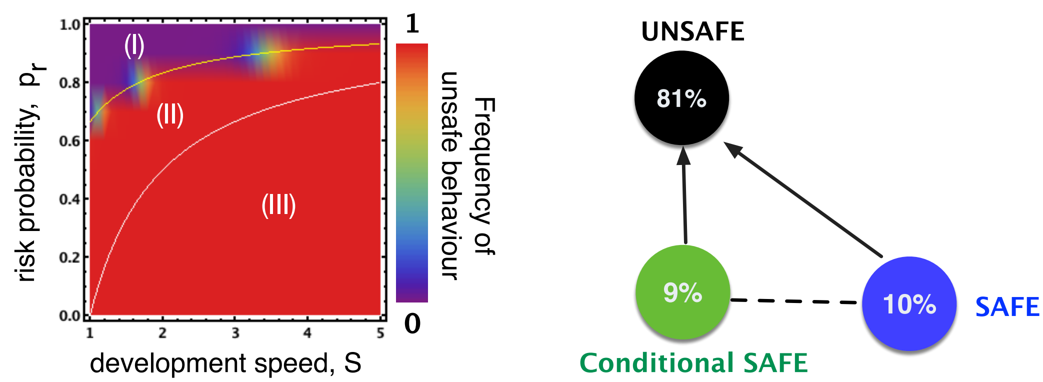
Tốc độ phát triển nhanh chóng của công nghệ trí tuệ nhân tạo (Artificial Intelligence - AI) cùng với việc gia tăng triển khai AI trong các lĩnh vực ứng dụng mới như robot, nhận dạng khuôn mặt, xe không người lái, di truyền học, đang tạo ra một nỗi lo khiến cho các công ty, các quốc gia và các khu vực nghĩ rằng họ nên cạnh tranh để có thể đáp ứng được. Ví dụ, AI dường như đã kích động một cuộc chạy đua giữa các nhà sản xuất chip, đơn giản vì những yêu cầu mà nó đặt ra đối với công nghệ. Các chính phủ đang tiếp tục kích thích các khoản đầu tư kinh tế vào việc nghiên cứu và phát triển AI do nỗi sợ bị lỗi thời, dẫn đến một cuộc chạy đua làm tăng thêm sự lo lắng của các bên liên quan.

Tuy nhiên, các cuộc đua giành ưu thế trong một lĩnh vực thông qua AI có thể gây ra những bất lợi bởi các bên tham gia có thể lờ đi các quy chuẩn đạo đức và an toàn để tăng tốc độ phát triển và tiếp cận thị trường một cách sớm nhất. Các nhà nghiên cứu và cơ quan quản lý về AI, chẳng hạn như Liên minh Châu Âu (EU) và Viện Future of Life, đang thúc giục cùng nhau xem xét cả về tác động tiêu chuẩn và tác động xã hội của những tiến bộ công nghệ trọng điểm có liên quan. Tuy nhiên, với độ bao phủ và chiều sâu của AI cùng với những tiến bộ của nó, việc đánh giá xem công nghệ AI nào trong một lĩnh vực cụ thể cần được điều tiết và khi nào cần điều chỉnh thật sự là một nhiệm vụ không hề dễ dàng. Đây là một trong các vấn đề đã được EU nhấn mạnh trong Sách trắng gần đây về AI. Dữ liệu để ước tính rủi ro của một công nghệ thường bị hạn chế, đặc biệt là ở giai đoạn đầu của quá trình phát triển hoặc triển khai.

Ở đây, chúng ta đưa ra một cái nhìn tổng quan về các công trình gần đây [HPSL20, HPLS21]. Các công trình đó đã xem xét vấn đề hành vi an toàn trên phương diện lý thuyết bằng cách sử dụng phương pháp EGT, dựa vào một tình huống tiến thoái lưỡng nan trong công cuộc đổi mới mà ở đó các chuyên gia công nghệ có thể chọn chiến lược phát triển an toàn (SAFE) hoặc chấp nhận rủi ro (UNSAFE). Các công ty đua nhau hướng tới việc triển khai một số sản phẩm ứng dụng AI trong một lĩnh vực X nào đó. Họ hoặc có thể xem xét kỹ lưỡng tất cả dữ liệu và cạm bẫy AI xuyên suốt quá trình (SAFE), hoặc sẽ chấp nhận rủi ro không đáng có từ việc bỏ qua một số thử nghiệm chỉ để tăng tốc quá trình (UNSAFE). Nhìn chung, chiến lược SAFE tốn kém hơn và cần nhiều thời gian thực hiện hơn so với chiến lược UNSAFE, cho phép các nhà chiến lược UNSAFE tiếp tục khẳng định những lợi ích đáng kể từ việc đạt được ưu thế về công nghệ.

Cụ thể, chúng tôi nhận thấy rằng cần có một khoảng thời gian nhất định để có thể đạt được ưu thế trong một lĩnh vực thông qua AI (domain supremacy through AI - DSAI), do đó chúng tôi mô hình hóa tiến trình này bằng một số bước phát triển hoặc giai đoạn tiến bộ công nghệ [HPSL20]. Trong mỗi giai đoạn, các nhóm phát triển (hoặc người chơi) cần phải chọn một trong hai chiến lược: hoặc tuân theo các biện pháp an toàn (hành động SAFE), hoặc bỏ qua các biện pháp an toàn (hành động UNSAFE). Hơn nữa, để tránh khả năng một bên bị các đối thủ lợi dụng, chúng tôi cũng xem xét chiến lược SAFE có điều kiện: chỉ chọn SAFE nếu như các đối thủ cũng đã từng làm như vậy trong quá khứ.

Vì cần nhiều thời gian và công sức hơn để tuân thủ các biện pháp an toàn, chọn SAFE không những tốn kém hơn mà còn khiến tốc độ phát triển chậm hơn so với việc chọn UNSAFE. Do đó, chúng tôi giả định rằng chọn SAFE sẽ mất một chi phí $c > 0$, trong khi chọn UNSAFE thì lại không tốn phí ($c = 0$). Hơn nữa, tốc độ phát triển khi chọn UNSAFE là $s > 1$, trong khi tốc độ chọn SAFE được chuẩn hóa thành $s = 1$. Tương tác được lặp lại cho đến khi một hoặc nhiều đội thiết lập trạng thái DSAI - diễn ra theo xác suất, tức là mô hình giả định rằng, sau mỗi giai đoạn, xác suất để cần thêm một giai đoạn nữa mới đạt được trạng thái DSAI là ω, từ đó suy ra số giai đoạn trung bình trong mỗi cuộc cạnh tranh/cuộc đua là $W = (1-\omega)^{-1}$. Do đó, chúng tôi không đưa ra bất kỳ giả thiết nào về giới hạn thời gian để đạt được trạng thái DSAI trong một lĩnh vực nhất định. Tuy nhiên, một khi cuộc đua đã kết thúc, một lợi nhuận lớn hoặc giải thưởng B nào đó sẽ được chia cho tất những người cùng đạt được mục tiêu.



HÌNH 1. Tần suất của hành vi không an toàn dưới dạng một hàm số theo tốc độ phát triển và rủi ro, khi không có các biện pháp khuyến khích (xem Tài liệu tham khảo [HPSL20]). Ở các vùng (I) và (III), dễ thấy hành vi an toàn và không an toàn/đổi mới lần lượt là kết quả được ưu tiên và được lựa chọn một cách hoàn toàn tự nhiên, do đó không cần áp dụng quy chế. Vùng (II) yêu cầu áp dụng quy chế do hành vi an toàn được ưu tiên hơn nhưng lại không được lựa chọn. Điều kiện của các đường ranh giới có thể được xác định cho vùng (II), bằng phương pháp EGT: $1 - 1/s < p_r < 1 - 1/(3s)$.

Chúng tôi đưa tất cả các đội ngũ phát triển (ví dụ: các công ty AI, các quốc gia) vào mô hình tiến hóa của việc triển khai các chiến lược SAFE, UNSAFE hoặc SAFE có điều kiện. Chúng tôi sử dụng phương pháp ngẫu nhiên EGT cho các quần thể hữu hạn [NSTF04]. Ví dụ, trong Hình 1 chúng tôi xét một quần thể gồm 100 đội ngũ phát triển, giả định rằng ban đầu họ có thể chọn ngẫu nhiên một trong ba chiến lược đã nêu. Tóm lại, chúng ta cần tính toán phân phối dừng của một chuỗi Markov có các nút đại diện tương ứng với các chiến lược đang xét (tức là ba nút trong trường hợp của chúng tôi, xem biểu đồ bên phải) và sự chuyển đổi giữa các nút là xác suất để một chiến lược khác được đưa vào áp dụng cho một quần thể (xem chi tiết trong [HPSL20]).

Từ đó, chúng tôi xác định các điều kiện xuất hiện hành vi an toàn hoặc chấp nhận rủi ro và nhìn chung khi nào chúng được ưu tiên để nhằm gia tăng phúc lợi xã hội. Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu cách định hướng sao cho các chiến lược có thể đạt kết quả an toàn và hiệu quả; cụ thể, chúng tôi đưa ra thời điểm và cách thức xử phạt các quyết định không an toàn mà các bên liên quan đưa ra, hoặc khen thưởng những bên tuân thủ. Cuối cùng, chúng tôi xác định khi nào các quy chế cần được đưa ra để hướng tới những kết quả có lợi nhất cho tất cả các bên, nhưng đồng thời lưu tâm đến việc các quy chế nghiêm ngặt có thể bị ban hành quá sớm và gây cản trở sự đổi mới [HPSL20, HPLS21].

Bài học về các chính sách quản trị AI. Chúng ta có thể thấy rằng độ dài của quá trình đạt tính vượt trội hoặc ưu thế trong một lĩnh vực AI nào đó đóng một vai trò quan trọng trong việc xác định thời điểm ban hành các quy chế [HPSL20]. Ví dụ, có lẽ sẽ mất rất nhiều thời gian cho đến khi chúng ta tạo ra được một AI có thể làm bất cứ điều gì trong khả năng của con người (thường được gọi là Trí tuệ nhân tạo tổng hợp - Artificial General Intelligence). Tuy nhiên, trong nhiều lĩnh vực, chẳng hạn như trò chơi cờ vua, AI đã vượt trội hơn con người. Cũng sẽ không mất quá nhiều thời gian cho đến khi những chiếc xe không người lái trở nên an toàn hơn so với xe có người điều khiển.

Chúng tôi nhận thấy rằng, đối với các tình huống có kết quả ngắn hạn, trong các mô phỏng của chúng tôi, những công ty bỏ qua các biện pháp an toàn nhất định giành chiến thắng, và do đó cần được điều tiết lại bởi các quy chế. Tuy nhiên, trong trường hợp này, các quy định phụ thuộc vào việc tìm ra sự cân bằng giữa tốc độ đổi mới mong muốn và rủi ro từ các ảnh hưởng ngoại lai tiêu cực.

Ngược lại, đối với một tình huống có kết quả dài hạn, việc sàng lọc các hành động không an toàn đảm bảo rằng chỉ khi có rủi ro thấp thì các công ty thắng cuộc mới đưa ra hành động không an toàn. Việc chấp nhận rủi ro như vậy, trái ngược với việc tuân thủ các biện pháp an toàn, cần được điều tiết để hướng tới lợi ích của xã hội. Như vậy, trong cả hai tình huống, chỉ khi lợi ích cá nhân mâu thuẫn với lợi ích toàn thể thì quy chế minh bạch đối với các hành vi không an toàn mới thật sự quan trọng.

Những phát hiện này cho thấy, khi xác định các chuẩn mực hành vi và quy chế dành cho AI, trước hết, cần phải hiểu rõ thời gian của cuộc đua để quản trị AI sao cho hiệu quả. Quy định có thể không phải lúc nào cũng cần thiết và thậm chí có thể gây nên những tác động bất lợi nếu không được áp dụng kịp thời trong đúng hoàn cảnh.

Thật vậy, chúng tôi đã thử chạy mô phỏng xem điều gì sẽ xảy ra nếu các công ty chấp nhận rủi ro luôn bị phạt [HPLS21] và bị giảm tốc độ phát triển bởi các bên còn lại. Như đã dự đoán trước, việc lạm dụng xử phạt có thể gây kìm hãm đổi mới bất cứ khi nào lợi ích từ việc tăng tốc áp đảo rủi ro phải gánh chịu.

Tuy nhiên, có một vấn đề vẫn cần được giải quyết để có được các quy chế phù hợp: Ngay cả khi chúng tôi có thể đánh giá thời gian của trò chơi, chúng tôi vẫn cần ước tính các thước đo rủi ro và lợi ích liên quan đến các hành vi chấp nhận rủi ro. Để làm vậy, chúng tôi cần dữ liệu, nhưng thường lại không có sẵn ở giai đoạn đầu của tiến trình phát triển.

Mặc dù vậy, phát hiện mới nhất của chúng tôi chỉ ra được một giải pháp dựa trên ý tưởng về các thỏa thuận an toàn tự nguyện. Cụ thể, các công ty có thể đạt được kết quả mong muốn mà không bị xử phạt nếu họ hoặc có quyền tự do theo đuổi đường lối hành động của riêng mình, hoặc thiết lập các thỏa thuận ràng buộc để hành động một cách an toàn. Việc xử phạt sau đó chỉ có thể được áp dụng đối với những trường hợp không tuân thủ theo thỏa thuận đã cam kết. Do đó, phân tích của chúng tôi cho thấy nên khuyến khích lựa chọn này, cho phép các công ty AI tự nguyện cam kết các thỏa thuận an toàn mà không phải chịu bất cứ ảnh hưởng gì nếu họ chọn từ chối.

4. Kết luận

Kể từ khi ra đời, nghiên cứu trong EGT vừa thú vị, vừa đem lại nhiều thách thức, nhưng cũng có nhiều triển vọng. Một mặt, mục tiêu chính của EGT là phân tích các hệ động lực có quy mô lớn nhằm nghiên cứu tương tác giữa một số bên; nó rất phức tạp và đòi hỏi sự kết hợp đa dạng và mới mẻ giữa các phương pháp toán học và các kỹ thuật mô phỏng. Mặt khác, nghiên cứu EGT là một công cụ vô cùng mạnh mẽ và có tính ứng dụng cao trong rất nhiều lĩnh vực, có những phát hiện quan trọng thường được báo cáo tại các hội nghị uy tín.

Mặc dù đã trải qua nhiều năm nghiên cứu tích cực, vẫn còn tồn tại các bài toán mở quan trọng trong nghiên cứu EGT. Bài toán giải thích các cơ chế của hành vi tập thể như hợp tác và lòng vị tha, vẫn còn bỏ ngỏ [Pen05]. Ngoài ra, việc mở rộng và tổng quát hóa các kỹ thuật toán học và công cụ mô hình hóa hiện có để nắm bắt và hiểu được các hệ thống thực tế và phức tạp hơn bao giờ hết, là rất quan trọng. Ví dụ, xã hội hiện đại ngày càng trở nên phức tạp hơn với sự tiến bộ công nghệ, thay đổi cách sống và tương tác xã hội của mỗi cá nhân. Làm thế nào để áp dụng EGT trong việc mô hình hóa xã hội lai tạp này và hiểu được động lực của nó là rất khó. Nhưng việc giải quyết nó có thể cung cấp những hiểu biết sâu sắc để xây dựng các cơ chế phù hợp nhằm đảm bảo lợi ích lớn chung cho xã hội của chúng ta, hoặc ít nhất là để tránh được những rủi ro tiềm ẩn mà chúng ta có thể sẽ phải đối mặt.

Các nhà nghiên cứu và sinh viên có nền tảng về toán học ứng dụng và toán học thuần túy, quan tâm đến nghiên cứu liên ngành, các hệ thống phức tạp và hành vi của con người, hoàn toàn đủ năng lực để đối phó với những thách thức nghiên cứu này. Thành tựu hứa hẹn dành cho họ cũng sẽ rất lớn, cả về mặt tinh thần lẫn về kết quả nghiên cứu.

Tài liệu

[DH16] M. H. Duong and T. A. Han. Analysis of the expected density of internal equilibria in random evolutionary multi-player multi-strategy games. *Journal of Mathematical Biology*, 73(6):1727–1760, 2016.

[DTH18] M. H. Duong, H. M. Tran, and T. A. Han. On the expected number of internal equilibria in random evolutionary games with correlated payoff matrix. *Dynamic Games and Applications*, Jul 2018.

[DTH19] M. H. Duong, H. M. Tran, and T. A. Han. On the distribution of the number of internal equilibria in random evolutionary games. *Journal of Mathematical Biology*, 78(1):331–371, Jan 2019.

[EK95] A. Edelman and E. Kostlan. How many zeros of a random polynomial are real? *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 32(1):1–37, 1995.

[GT10] C. S. Gokhale and A. Traulsen. Evolutionary games in the multiverse. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 107(12):5500–5504, 2010.

[Han13] T. A. Han. *Intention Recognition, Commitments and Their Roles in the Evolution of Cooperation: From Artificial Intelligence Techniques to Evolutionary Game Theory Models*. Springer, 2013.

[HPLS21] T. A. Han., L. Moniz Pereira, T. Lenaerts, and F. C. Santos. Mediating Artificial Intelligence Developments through Negative and Positive Incentives. *PLOS ONE*, 16(1):e0244592, 2021.

[HPSL20] T. A. Han, L. Moniz Pereira, F. C. Santos, and T. Lenaerts. To Regulate or Not: A Social Dynamics Analysis of an Idealised AI Race. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 69:881–921, 2020.

[HS98] J. Hofbauer and K. Sigmund. *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[HTG12] T. A. Han, A. Traulsen, and C. S. Gokhale. On equilibrium properties of evolutionary multi-player games with random payoff matrices. *Theoretical Population Biology*, 81(4):264 – 272, 2012.

[MSP73] J. Maynard Smith and G. R. Price. The logic of animal conflict. *Nature*, 246:15–18, 1973.

[Now06] M. A. Nowak. Five rules for the evolution of cooperation. *Science*, 314:1560–1563, 2006.

[NSTF04] M. A. Nowak, A. Sasaki, C. Taylor, and D. Fudenberg. Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite populations. *Nature*, 428:646–650, 2004.

[Pen05] E. Pennisi. How did cooperative behavior evolve? *Science*, 309(5731):93–93, 2005.

[PJR$^+$17] M. Perc, J. J. Jordan, D. G. Rand, Z. Wang, S. Boccaletti, and A. Szolnoki. Statistical physics of human cooperation. *Physics Reports*, 687:1–51, 2017.

[SP11] F. C. Santos and J. M. Pacheco. Risk of collective failure provides an escape from the tragedy of the commons. *Proc Natl Acad Sci U S A*, Jun 2011.

[VNM44] J. Von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press, 1944.

Liên đoàn Toán học Quốc tế sau một thế kỷ [(1)]

Carlos E. Kenig [(2)]

Lời dẫn: *Liên đoàn Toán học Quốc tế (IMU) vừa tròn một trăm tuổi vào ngày 20 tháng 9 năm 2020, và đã bước sang những năm đầu tiên của thế kỷ thứ hai. Nhiều hoạt động kỷ niệm một thế kỷ hoạt động của IMU được dự định trong năm 2020 đã phải chuyển sang năm 2021 do dịch Covid-19. Từ 27-28/9/2021, hội nghị "Mathematics without Borders: The Centennial of the International Mathematical Union" để kỷ niệm sự kiện này đã được Tổng thống Pháp chủ trì tổ chức tại toà nhà Palais Universitaire, Strasbourg, Pháp, đúng nơi từng diễn ra việc thành lập IMU và tổ chức ICM năm 1920. Ban Biên tập Bản tin TTTH xin giới thiệu bài viết của GS. Carlos E. Kenig, Chủ tịch IMU, nhân sinh nhật 100 tuổi của IMU.*

Những mục tiêu chính của Liên đoàn Toán học Quốc tế (IMU) là thúc đẩy hợp tác giữa các quốc gia trong lĩnh vực toán học, khuyến khích và hỗ trợ các hoạt động quốc tế đóng góp vào sự phát triển của các khoa học về toán (mathematical sciences) trên tất cả các khía cạnh - thuần túy, ứng dụng, hay giáo dục. Ngoài ra, IMU xác định địa điểm và chương trình khoa học của các Đại hội Toán học Quốc

[(1)] Carlos E. Kenig, The International Mathematical Union (IMU) at 100. *Notices AMS* **67**(3) (2020), 404 – 407.

[(2)] Carlos E. Kenig là giáo sư toán học tại Đại học Chicago. Hiện nay GS. Kenig là chủ tịch của Liên đoàn Toán học Quốc tế, nhiệm kỳ 2019–2022. *Email*: cek@math.uchicago.edu.

tế (ICM) và ghi nhận những đóng góp, nghiên cứu nổi bật cho toán học thông qua các giải thưởng khoa học. Mặc dù nhiều nhà toán học hiểu về IMU chủ yếu qua việc tổ chức các ICM, bài viết này nêu bật một cách nhìn toàn diện hơn về các chương trình và hoạt động đi kèm với mục đích của IMU. Đặc biệt, Liên đoàn Toán học Quốc tế tham gia sâu vào những sáng kiến hỗ trợ toán học và giáo dục toán học ở các nước đang phát triển và trong những nỗ lực toàn cầu nhằm đạt được sự cân bằng giới và bình đẳng cho các nhóm thiểu số trong khoa học.

ANNIVERSARY

1. Sơ lược về hoạt động hiện nay của Liên đoàn Toán học Quốc tế

Tiền thân của Liên đoàn Toán học Quốc tế ngày nay được thành lập tại Strasbourg, Pháp vào năm 1920. Do đó, năm 2020 là năm kỷ niệm một thế kỷ Liên đoàn Toán học Quốc tế. Tiền thân ban đầu của IMU đã bị giải thể vào năm 1932. Sau sự gián đoạn do Chiến tranh thế giới thứ hai, tại một hội nghị ở New York vào năm 1950 phiên bản hiện tại của IMU đã ra đời dựa trên nguyên tắc của chủ nghĩa quốc tế, cụ thể là, "toán học không biên giới - mathematics without borders". Từ năm 1950, các Đại hội Toán học Quốc tế (ICM) cũng được tổ chức trở lại, cách nhau 4 năm. Về những khía cạnh lịch sử sâu hơn của IMU và ICM, có thể tham khảo *Mathematics without borders, a history of the International Mathematical Union* (Toán học không biên giới, lịch sử của Liên đoàn Toán học Quốc tế) của O. Lehto, NXB Springer 1998, và *Mathematicians of the world, unite! The International Congress of Mathematicians - A Human Endeavor* (Các nhà toán học thế giới, đoàn kết lại! Đại hội Toán học Quốc tế - Một nỗ lực nhân văn) của G. Curbera, NXB Taylor & Francis 2009[3].

Ngày nay, hoạt động của IMU rất đa dạng và thông qua các ban và ủy ban. Liên đoàn có tám mươi chín quốc gia thành viên và tổ chức các hoạt động trên khắp thế giới. Cơ cấu này đặc biệt thuận lợi nhờ việc thành lập Ban Thư ký thường trực của Liên đoàn, đặt ở trung tâm Berlin, CHLB Đức. Ban Thư ký được thành lập vào năm 2011 và hoạt động thử nghiệm cho đến khi chính thức đi vào hoạt động thường trực từ năm 2019 nhờ sự tài trợ rộng rãi của Chính phủ Đức và Chính quyền Bang Berlin. Ban Thư ký điều hành hoạt động hàng ngày và hỗ trợ hành chính cho nhiều hoạt động của IMU. Tổng thư ký Liên đoàn điều hành các hoạt động của Ban Thư ký. Kho lưu trữ của IMU cũng được đặt cùng trong trụ sở của Ban Thư ký, đảm bảo việc bảo quản cho tương lai.

Hoạt động của Liên đoàn Toán học Quốc tế được một cơ quan điều hành với sự hỗ trợ của Ban Thư ký, gọi là Uỷ ban Điều hành (EC). Uỷ ban chịu trách nhiệm về tất cả các vấn đề chính sách và các nhiệm vụ, như lựa chọn thành viên các ủy ban khác. Các thành viên của IMU là các quốc gia, được đại diện bằng một tổ

[3]Xem thêm TTTH tập 25, số 3-4 (12/2021).

chức kết nối (Adhering Organization[4]). Phí thành viên do các tổ chức kết nối đóng góp được chi tài trợ cho phần lớn các hoạt động của Liên đoàn. Bốn năm một lần, các thành viên của Liên đoàn cùng nhau họp Đại hội đồng (General Assembly) ngay trước khi khai mạc Đại hội Toán học Quốc tế. Các quyết định chính của IMU được đưa ra tại Đại hội đồng và thông qua bằng cách bỏ phiếu.

HÌNH 1. Toà nhà Palais Universitaire, Strasbourg, Pháp.
Đây là nơi tổ chức ICM 1920 và thành lập IMU

2. HOẠT ĐỘNG CỦA CÁC BAN VÀ ỦY BAN CỦA LIÊN ĐOÀN TOÁN HỌC QUỐC TẾ

2.1. **Ban Quốc tế về Giảng dạy Toán (ICMI).** www.mathunion.org/icmi

IMU giữ liên hệ chặt chẽ với giáo dục toán học thông qua ICMI, ban lâu đời nhất trong các cơ quan của IMU. ICMI được thành lập vào năm 1908 tại Đại hội Toán học Quốc tế ở Rome và do đó còn ra đời trước cả IMU. Chủ tịch sáng lập ICMI là nhà toán học người Đức Felix Klein. Sau khi các hoạt động bị gián đoạn trong hai cuộc chiến tranh thế giới, ICMI được tái lập vào năm 1952 và trở thành một ban chính thức của IMU. ICMI mang đến một diễn đàn để phổ biến các ý tưởng về dạy và học toán, từ cấp tiểu học đến đại học. Mục tiêu quan trọng của ICMI là kết nối các nhà giáo dục toán học, giáo viên toán, nhà toán học, nhà nghiên cứu giáo dục, người thiết kế chương trình giảng dạy và những người khác quan tâm đến giáo dục toán học ở tất cả các cấp trên toàn thế giới nhằm cải tiến việc giảng dạy toán học. Do đó, ICMI làm việc với toàn bộ hoạt động giáo dục toán học cho mọi lứa tuổi, từ nghiên cứu lý thuyết giáo dục

[4]Chủ yếu là các hội toán học quốc gia (ND).

toán học đến thực hành giáo dục toán học.

Các hoạt động của ICMI bao gồm ba chuỗi hội nghị chính được tổ chức thường xuyên. Đó là các Hội nghị Nghiên cứu - Studies Conference (Các nghiên cứu được thực hiện bởi một nhóm quốc tế gồm các học giả và nhà thực hành hàng đầu, nhằm giải quyết các chủ đề có ý nghĩa đặc biệt trong giáo dục toán học đương đại; đã có hơn hai mươi tập Studies được xuất bản); các hội nghị khu vực, diễn ra khắp các khu vực trên toàn thế giới; và, trách nhiệm chính của ICMI, Đại hội Quốc tế về Giáo dục Toán học tổ chức bốn năm một lần với sự thu hút và ảnh hưởng trong cộng đồng giáo dục toán học sánh ngang với ảnh hưởng của ICM trong cộng đồng toán (xem https://www.icme14.org).

ICMI ghi nhận những thành tựu nổi bật trong nghiên cứu giáo dục toán học thông qua hai giải thưởng trao hai năm một lần, Giải thưởng Felix Klein (cho thành tựu trọn đời) và Giải thưởng Hans Freudenthal (cho một chương trình nghiên cứu chính). ICMI công nhận những thành tích xuất sắc trong thực hành giáo dục toán học thông qua Giải thưởng Emma Castelnuovo trao bốn năm một lần.

ICMI và IMU hợp tác trên một số dự án. Trong số đó, Dự án Klein được lấy cảm hứng từ cuốn sách của Klein *Toán sơ cấp từ quan điểm cao cấp* (Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint). Dự án hỗ trợ giáo viên kết nối nội dung toán họ dạy với những nghiên cứu đương đại trong các khoa học về toán. Blog blog.kleinproject.org chứa các bài báo ngắn được viết theo kiểu "minh họa" về những ứng dụng thú vị của toán học như "Cách Google hoạt động: Chuỗi Markov và giá trị riêng" và "Cách xếp cam là gì? Giả thuyết Kepler về sắp xếp hình cầu".

2.2. **Ban Các nước đang phát triển (CDC).** www.mathunion.org/cdc

Các hoạt động của IMU ở các nước đang phát triển do CDC điều hành, ban này được thành lập vào năm 2010. CDC cùng các đối tác đã có những ảnh hưởng rất lớn chỉ với nguồn lực rất hạn chế. Nằm trong số các chương trình quan trọng mà CDC chạy là chương trình học bổng sau đại học, chương trình tài trợ cho các nhà toán học đến giảng bài và cố vấn ở các nước đang phát triển, và các chương trình nâng cao năng lực các địa phương và năng lực giáo dục. Ví dụ, Chương trình Học bổng Sau đại học Đột phá IMU (IMU Breakout Graduate Fellowship Program), do CDC điều hành thông qua các khoản tài trợ hào phóng và liên tục của những người đoạt Giải thưởng Đột phá về Toán học, là một chương trình học bổng hỗ trợ sinh viên xuất sắc ở các quốc gia đang phát triển làm nghiên cứu sau đại học hướng đến việc lấy bằng tiến sĩ các khoa học về toán. Chương trình Hỗ trợ sau đại học ở các nước đang phát triển cung cấp tài chính hỗ trợ nghiên cứu sau đại học cho những sinh viên tài năng nhất trong các nhóm nghiên cứu mới nổi tại một nước đang phát triển. Nhóm nghiên cứu phải có sự hợp tác liên tục với một nhà toán học quốc tế làm việc ở một quốc gia khác, người này sau đó đóng vai trò là đối tác trong việc đào tạo sinh viên. CDC cũng hỗ trợ một phần cho các nhà toán học tham dự các hội nghị về các khoa học về toán được tổ chức ở các nước đang phát triển. Trong một số ít trường hợp, CDC tài trợ các hội nghị quốc tế ở nước phát triển để mời các nhà toán học từ các nước đang phát triển tham dự.

CDC quản lý Chương trình Giảng viên Tình nguyện cho các nước đang phát triển. Chương trình hỗ trợ tài chính cho các trường đại học ở các nước đang phát triển để tổ chức những khóa học chuyên sâu 3-4 tuần do những giảng viên tình nguyện đảm nhận. Những khoá học này là một phần của chương trình cấp bằng đại học hoặc thạc sĩ thông thường tại cơ sở chủ quản. CDC duy trì một cơ sở dữ liệu giảng viên tình nguyện và đối sánh với từng yêu cầu cụ thể. Một phần chương trình nhận được tài trợ từ Hội Toán học Hoa Kỳ (AMS) và Hội đồng Niels Henrik Abel - tổ chức giám sát các quỹ cho Giải thưởng Abel của Na Uy. Chương trình Học giả mời Abel (Abel Visiting Scholar, do Hội đồng Abel tài trợ) hỗ trợ những nhà toán học chuyên nghiệp ở các nước đang phát triển đến làm việc với cộng sự quốc tế trong thời gian một tháng. Chương trình Học bổng Châu Phi IMU-Simons (Quỹ Simons tài trợ) tài trợ các kỳ nghỉ phép (Sabbatical) cho các nhà toán học ở các nước đang phát triển Châu Phi đến một trung tâm toán học xuất sắc có uy tín quốc tế để hợp tác nghiên cứu.

CDC hợp tác với ICMI trong Dự án Năng lực và Mạng lưới để phát triển năng lực giáo dục cho những người chịu trách nhiệm đào tạo giáo viên dạy toán ở khu vực các nước đang phát triển. Dự án này nhằm đáp ứng những vấn đề trong báo cáo năm 2011 của UNESCO "Thách thức Hiện tại trong Giáo dục Toán học Cơ bản"[(5)]. Vì dự án tiếp cận giáo viên ở tất cả các cấp từ tiểu học trở lên nên có tiềm năng lớn giúp tạo ra chuyển biến. Các hội thảo trong phạm vi Dự án Năng lực và Mạng lưới đã được tổ chức tại Khu vực cận Sahara nói tiếng Pháp, ở Trung Mỹ và Caribe, ở Đông Nam Á và ở Khu vực núi Andes tại Nam Mỹ và Paraguay.

2.3. **Ban Quốc tế về Lịch sử Toán học (ICHM).** www.mathunion.org/ichm

ICHM là một ủy ban liên hiệp hội, thuộc cả IMU và Phân ban Lịch sử Khoa học của Liên đoàn Quốc tế về Lịch sử và Triết học của Khoa học Công nghệ. Mục tiêu của ICHM là khuyến khích nghiên cứu lịch sử toán học và thúc đẩy sự sâu sắc trong các nghiên cứu cả về mặt lịch sử và toán học. IMU chỉ định hai đại diện làm thành viên của Ban Điều hành ICHM. ICHM tài trợ và/hoặc đồng tài trợ các hội thảo chuyên đề tại Đại hội Quốc tế về Lịch sử Khoa học và Toán học, đồng thời tôn vinh các thành tựu xuất sắc trong lĩnh vực lịch sử toán học thông qua việc trao tặng Huy chương Kenneth O. May và Giải thưởng Montucla.

2.4. **Ủy ban Thông tin điện tử và Truyền thông (tên viết tắt là CEIC).** www.mathunion.org/ceic

CEIC là một ủy ban thường trực trong Uỷ ban Điều hành (EC) và có nhiệm vụ tư vấn cho Ủy ban Điều hành các vấn đề liên quan đến thông tin và truyền thông. Điều này bao gồm tư vấn về chuẩn mực và vấn đề triển khai hiệu quả nhất cho các tạp chí toán và các vấn đề xuất bản điện tử và truy cập mở. CEIC xác định và tư vấn cho EC về Thư viện Toán học Kỹ thuật số - dự án cung cấp truy cập trực tuyến đến toàn bộ các ấn phẩm toán học đã có, tập hợp tại một kho dữ liệu chung, được phát triển và quản lý bởi một mạng lưới các cơ quan và với chi phí hợp lý.

2.5. **Ủy ban Phụ nữ trong Toán học (CWM).** www.mathunion.org/cwm

Năm 2015, Uỷ ban Điều hành đã phê duyệt việc thành lập CWM nhằm thúc đẩy trao đổi giữa các tổ chức quốc gia và khu vực về phụ nữ và toán học. CWM đã hoạt động đặc biệt tích cực và thành công, đưa ra một số sáng kiến và luôn

[(5)] Xem thêm tại địa chỉ https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000191776_eng?posInSet=1&queryId=N-EXPLORE-fd8240f0-b446-4285-b77a-a142cf9ef856

ủng hộ lý tưởng bình đẳng giới trong các khoa học về toán. CWM giúp thiết lập và thúc đẩy mạng lưới các nhà toán học nữ ở Châu Á, Châu Mỹ Latinh và Châu Phi. CWM cũng tài trợ các khoá học dành cho các nhà toán học nữ, đặc biệt là ở các nước đang phát triển. Một ngày trước khi khai mạc ICM 2018, CWM đã tổ chức Đại hội Các nhà toán học nữ Thế giới $(WM)^2$ như một hội nghị vệ tinh của ICM 2018 tại Rio de Janeiro, Brazil. Lễ tưởng nhớ Maryam Mirzakhani (1977-2017, huy chương Fields năm 2014) đã được CWM tổ chức trong $(WM)^2$ và tiếp tục trong ICM 2018. Theo dự kiến, hội nghị $(WM)^2$ tiếp theo sẽ diễn ra tại Saint Petersburg, Nga vào ngày 5/7/2022, một ngày trước khai mạc ICM 2022[(6)].

Qua CWM, IMU được Hội đồng Khoa học Quốc tế chọn là một trong hai đối tác chính trong dự án được Hội đồng tài trợ "Tiếp cận toàn cầu đối với bất bình đẳng giới trong khoa học tự nhiên, khoa học máy tính và toán học: Đo lường và giảm thiểu thế nào?" Cuộc họp kết thúc dự án diễn ra vào tháng 11/2019 tại Trung tâm Vật lý Lý thuyết Quốc tế ở Trieste, Ý. Báo cáo về dự án cũng như các phương tiện tạo ra để thực hiện dự án và các khuyến nghị đã được công bố tại cuộc họp này.

3. Đại hội Toán học Quốc tế và các giải thưởng của Liên đoàn Toán học Quốc tế

3.1. Đại hội Toán học Quốc tế. Mặc dù ngày nay Liên đoàn Toán học Quốc tế không chỉ tài trợ cho các Đại hội Toán học Quốc tế (ICM), nhưng ICM vẫn là hoạt động hàng đầu của IMU. ICM tiếp theo sẽ được tổ chức vào các ngày 6-14/7/2022 tại Saint Petersburg, Nga (https://icm2022.org)[(7)].

ICM được thừa nhận rộng rãi là nơi tụ họp những nhà toán học quốc tế hàng đầu. Bốn năm tổ chức một lần, Đại hội đóng một vai trò đặc biệt trong cộng đồng toán học với việc ghi nhận những thành tựu nghiên cứu tiêu biểu gần nhất trong tất cả các lĩnh vực toán học và cả bằng việc tạo cho cộng đồng rộng lớn các nhà toán học một cơ hội để tìm hiểu những phát triển nghiên cứu mới nhất và tương tác với những người dẫn dầu trong các lĩnh vực. Khía cạnh thứ hai đặc biệt có giá trị đối với các nhà toán học mới vào nghề và đối với các nhà toán học từ các nước đang phát triển, họ có thể chỉ có vài cách hạn chế để tương tác với các nhà toán học tiên phong. IMU chịu trách nhiệm chương trình khoa học của Đại hội. Các nhiệm vụ tổ chức khác do nước đăng cai đảm nhiệm. Cho đến năm 2018, toàn bộ chương trình khoa học của Đại hội, từ việc lựa chọn và quy mô các tiểu ban, đến việc lựa chọn người báo cáo, đều do Ban Chương trình (PC) chịu trách nhiệm.

3.2. Phát triển mới tại các kỳ ICM. Lịch làm việc chặt chẽ và trách nhiệm to lớn khiến PC rất khó điều chỉnh một cách cơ bản đối với cấu trúc khoa học của Đại hội. Theo thời gian, ngày càng có nhiều lo ngại rằng việc phân chia toán học thành các tiểu ban được triển khai quá chậm. Hơn nữa, đa số thấy rằng Đại hội chú trọng các chuyên ngành "thuần túy" hơn là các ngành "ứng dụng". Về nguyên tắc, ICM mang đến một cơ hội đầy hứa hẹn và hiếm có để các nhà toán học thuần túy và ứng dụng đến với nhau và tìm hiểu những phát triển mới nhất đầy cảm hứng

(6) Gần đây, IMU quyết định sẽ tổ chức ICM 2022 theo hình thức trực tuyến và bên ngoài nước Nga, cụ thể là tại Phần Lan, vì xung đột Nga – Ukraina (BBT).

(7) Xem chú thích trước đó. Trang mạng nói trên của ICM 2022 không còn hoạt động. Trang mạng mới của đại hội là https://www.mathunion.org/icm/virtual-icm-2022.

ở vùng tiếp giáp giữa hai mảng này, và vì hiện tại có rất nhiều phát triển lý thú trong những ứng dụng mới của toán, đã đến lúc phải thay đổi. Trên cơ sở đó, Đại hội đồng họp năm 2018 đã thông qua việc thành lập một ủy ban mới, Ủy ban Cấu trúc (SC), với thành viên do EC lựa chọn và có trách nhiệm quyết định cấu trúc khoa học của Đại hội Toán học Quốc tế, do đó giúp giảm bớt cho Ban Chương trình một phần trong nhiệm vụ to lớn của họ. Tư cách thành viên đầy đủ của SC được công khai trên trang web của Liên đoàn. Ngược lại, chỉ có danh tính chủ tịch của SC được tiết lộ. Các thành viên còn lại sẽ được tiết lộ tại ICM 2022. Về lâu dài, SC sẽ vẫn là một ủy ban thường trực với các thành viên luân phiên thay nhau, chịu trách nhiệm liên tục đánh giá và sửa đổi cấu trúc khoa học của ICM.

HÌNH 2. Poster của ICM 1920, tổ chức ở Strasbourg, Pháp

3.3. **Các giải thưởng của Liên đoàn Toán học Quốc tế.** Bốn năm một lần, Liên đoàn Toán học Quốc tế trao các giải thưởng sau đây cho các thành tựu toán học tại lễ khai mạc ICM.

Huy chương Fields: Giải thưởng nhằm công nhận thành tích đặc biệt đối với những công trình đã đạt được và hứa hẹn những thành tựu trong tương lai của các nhà toán học dưới bốn mươi tuổi. Được trao lần đầu tiên vào năm 1936, đến nay tại mỗi kỳ ICM có từ hai đến bốn huy chương Fields được trao.

Giải thưởng Rolf Nevanlinna: Giải thưởng công nhận những đóng góp nổi bật trong các khía cạnh toán học của khoa học máy tính. Được trao lần đầu tiên vào năm 1982, Giải thưởng đã bị chấm dứt sau lần bỏ phiếu của Đại hội đồng vào năm 2018 và thay thế bằng Huy chương Bàn tính IMU (IMU Abacus Medal) với quy chế tương tự.

Giải thưởng Carl Friedrich Gauss: Giải thưởng công nhận những đóng góp toán học nổi bật để tìm ra những ứng dụng quan trọng bên ngoài toán học. Giải thưởng được Liên đoàn Toán học Quốc tế và Hội Toán học Đức (DMV) trao tặng từ ICM 2006.

Huy chương Chern: Giải thưởng tôn vinh một cá nhân có thành tựu nhận được sự công nhận cao nhất cho những thành tích xuất sắc trong toán học. Giải thưởng được IMU và Quỹ huy chương Chern phối hợp, trao lần đầu tiên tại ICM 2010.

Giải thưởng Leelavati được trao tại Lễ Bế mạc các kỳ ICM và nhằm công nhận những công bố phổ biến kiến thức toán học xuất sắc. Giải thưởng được trao lần đầu tiên vào năm 2010 và được tập đoàn CNTT Infosys của Ấn Độ tài trợ từ ICM 2014.

Liên đoàn Toán học Quốc tế ghi nhận công lao của những phụ nữ đã có những đóng góp cơ bản và bền vững cho các khoa học về toán thông qua một bài giảng toàn thể đặc biệt của Đại hội Toán học Quốc tế, Bài giảng Emmy Noether ICM.

Đối với mỗi giải thưởng, Ủy ban Điều hành IMU chỉ định một ủy ban tuyển chọn. Chỉ có tên của chủ tịch các ủy ban được công khai trước mỗi kỳ ICM. Các đề cử đều được khuyến khích tuỳ theo quy chế từng giải thưởng cụ thể. Đề cử được gửi đến chủ tịch của ủy ban tương ứng.

4. Lưu ý cuối cùng

Trang web của Liên đoàn Toán học Quốc tế có thông tin phong phú về các hoạt động của tổ chức. IMU cũng xuất bản một bản tin điện tử hai tháng một lần, IMU-Net. Bạn có thể đăng ký nhận bản tin bằng cách gửi email đến imu-net-request@mathunion.org với dòng chủ đề: subscribe. Liên đoàn Toán học Quốc tế đã tham gia một loạt hoạt động thúc đẩy sự hợp tác quốc tế trong toán học. Các hoạt động này bao gồm từ hỗ trợ cho việc nghiên cứu và thực hành giáo dục toán học, giúp giải phóng toàn bộ tiềm năng trong các khoa học về toán của thế giới các nước đang phát triển, đến hỗ trợ xóa bỏ khoảng cách giới trong các ngành khoa học. Ủy ban Thông tin điện tử và Truyền thông giúp cộng đồng toán học quốc tế điều hướng quá trình chuyển đổi xuất bản do các hình thức truyền thông điện tử mang lại và hỗ trợ dự án Thư viện Toán học Kỹ thuật số, là nguyện vọng lớn của cộng đồng toán học thế giới. IMU tiếp tục đưa ra những hỗ trợ kiên quyết nhất cho nghiên cứu trong các khoa học về toán theo nhiều cách cùng với Đại hội Toán học quốc tế và các giải thưởng.

Tất cả những điều này sẽ không thể thực hiện được nếu không có sự làm việc không mệt mỏi của nhiều tình nguyện viên trong cộng đồng toán học trên toàn thế giới. Hãy giúp đỡ tổ chức này bằng việc tham gia cùng với những tình nguyện viên ấy! IMU được tài trợ thông qua các khoản phí do các tổ chức kết nối nộp và thông qua các khoản quyên tặng hào phóng. Một số khoản đóng góp này rất lớn, chẳng hạn như khoản đóng góp Chính phủ Đức và Chính quyền Bang Berlin dành cho Ban Thư ký, và khoản đóng góp những người đoạt Giải thưởng Đột phá tài trợ cho Chương trình Học bổng Sau đại học Đột phá IMU nhằm hỗ trợ các nghiên cứu sau đại học ở các nước đang phát triển. Một số nhỏ thôi, như số tiền mỗi thành viên AMS đóng góp (8 USD) khi họ đánh dấu vào ô trong biểu mẫu gia hạn tư cách thành viên AMS của mỗi người. Dù nhỏ hay lớn, những khoản đóng góp này cộng lại sẽ hỗ trợ một IMU hoạt động đầy đủ. Vui lòng xem xét đóng góp cho IMU và các chương trình của Liên đoàn khi ta cùng nhau bắt đầu thế kỷ tiếp theo.

Người dịch: Đoàn Trung Cường (Viện Toán học, Viện HLKHCN VN)

Tin tức hội viên và hoạt động toán học

* **Buổi gặp mặt đầu xuân Nhâm Dần** của Hội Toán học đã được tổ chức ngày 20/2/2022 tại trụ sở mới của Viện NCCC về Toán (phố Chùa Láng, Đống Đa, Hà Nội). Do dịch Covid nên buổi gặp mặt đầu năm được Hội tổ chức ở quy mô nhỏ. Trong buổi gặp mặt, GS. Ngô Việt Trung – Chủ tịch Hội – đã báo cáo tổng kết hoạt động năm 2021. Nhân dịp này các hội viên tham dự cũng được nghe tóm tắt một số hoạt động của Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển Toán học giai đoạn 2021-2030 và giới thiệu về trụ sở mới của Viện NCCC về Toán. Một điểm mới trong hoạt động gặp mặt đầu xuân năm nay là việc trao giải kỳ thi "Bài giảng và bài viết về toán học mang tên Hoàng Tụy", bên cạnh giải thưởng Lê Văn Thiêm như thông lệ hằng năm.

Lễ trao giải thưởng Lê Văn Thiêm 2021. Ảnh: Hội Toán học VN.

* Ngày 20/2/2022, trong buổi gặp mặt đầu xuân mừng năm mới Nhâm Dần của Hội Toán học Việt Nam, Ban Chấp hành Hội đã tổ chức lễ trao **giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2021** cho hai giáo viên và hai học sinh có thành tích xuất sắc.

1. Thầy **Nguyễn Hoàng Cương**, trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định. Từ năm học 2004-2005 đến nay luôn có học sinh đạt giải trong kỳ thi học sinh giỏi quốc gia về Toán, trong đó có 3 giải nhất và 3 học sinh đoạt huy chương đồng IMO.

2. Thầy **Lê Xuân Đại**, trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc. Thầy Lê Xuân Đại có 15 năm giảng dạy học sinh giỏi toán của Vĩnh Phúc. Thầy đã trực tiếp tham gia bồi dưỡng 36 học sinh đoạt giải quốc gia với nhiều giải nhất, nhì, ba, đồng thời có 3 học sinh đoạt huy chương IMO (hai huy chương bạc, một huy chương đồng).

3. Bạn **Trương Tuấn Nghĩa**, hiện là sinh viên năm thứ nhất Khoa Toán – Cơ – Tin học, Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội. Năm học 2019-20, bạn Nghĩa đoạt huy chương vàng IMO khi đang là học sinh lớp 11, Trường THPT Chuyên Khoa học Tự nhiên, Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, và năm học 2020-21 đoạt huy chương bạc IMO khi đang là học sinh lớp 12.

4. Bạn **Phan Huỳnh Tuấn Kiệt**, hiện là sinh viên năm thứ nhất, Khoa Toán – Tin học, Trường Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh. Năm học 2020-21, khi là học sinh lớp 12, Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong, Tp. Hồ Chí Minh, bạn giành Giải nhất Kỳ thi Học sinh giỏi quốc gia về Toán và đoạt Huy chương Đồng IMO. Điều kiện kinh tế của gia đình còn hạn hẹp.

* **Giải thưởng khoa học Viện Toán học năm 2021** được trao cho TS. **Nguyễn Thanh Hoàng** (Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng) và TS. **Trần Giang Nam** (Viện Toán học – Viện HLKHCN Việt Nam).

TS. Nguyễn Thanh Hoàng được trao giải thưởng Viện Toán học vì những đóng góp cho lý thuyết nhóm hình học – tập trung nghiên cứu các nhóm hữu hạn sinh thông qua tính chất hình học, tôpô của các không gian trên đó các nhóm này tác động lên. Cụm công trình được trao giải của TS. Nguyễn Thanh Hoàng tập trung vào những vấn đề về nhóm cơ bản của các đa tạp 3 chiều, như vấn đề biến dạng của nhóm con, và tính tựa lồi (quasiconvex).

TS. Trần Giang Nam được trao giải thưởng vì những đóng góp cho lý thuyết biểu diễn của đại số đường Leavitt của đồ thị. Một số bài toán nghiên cứu của anh là phân loại các đại số đường Leavitt chính xác đến tương đương Morita thông qua việc nghiên cứu giả thuyết tương Morita cho các đại số đồ thị (do Abrams và Tomforde đề xuất vào năm 2011), và xây dựng các biểu diễn bất khả quy mới của đại số đường Leavitt.

* **Ngày Toán học Thế giới: Toán học kết nối chúng ta** là hoạt động được tổ chức vào buổi chiều ngày 14/03/2022 tại Hội trường Hoàng Tụy, Viện Toán học. Sự kiện do Trung tâm Quốc tế Đào tạo và Nghiên cứu Toán học UNESCO, Viện Toán học – Viện HLKHCN VN và Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup (VinIF) đồng tổ chức. Tại sự kiện có ba bài giảng đại chúng của PGS. Ngô Đức Thành (ĐH Khoa học và Công nghệ HN, Viện HLKHCN VN), TS. Võ Sỹ Nam (Viện Nghiên cứu Dữ liệu lớn), và nhà thơ/dịch giả Nguyễn Như Huy (Trung tâm nghệ thuật ZeroStation). Hai bài giảng đầu tiên chỉ ra ứng dụng của toán học trong những lĩnh vực khoa học về khí hậu và y sinh học. Bài giảng thứ ba đưa ra một góc nhìn của một nghệ sĩ độc lập về toán học như một trong nhiều cách con người nhận thức thế giới và giao tiếp với nhau, bên cạnh triết học và thiền. Ngoài ra, chương trình kỷ niệm ngày Toán học thế giới còn có buổi tọa đàm với sự góp mặt của PGS. Huỳnh Thị Thanh Bình (ĐH Bách Khoa HN), nhà thơ/dịch giả Nguyễn Như Huy, ông Nguyễn Tuấn Huy (Công ty Viễn thông MobiFone), PGS. Ngô Đức Thành, và GS. Ngô Việt Trung (Hội Toán học VN, Viện Toán học, Viện HLKHCN VN). PGS. Phan Thị Hà Dương (Viện Toán học và Quỹ VinIF) là người dẫn chương trình trong buổi tọa đàm sôi nổi về ứng dụng của toán học, các tiếp cận khác nhau về giáo dục toán học, giá trị khách quan của tri thức toán học, và nhiều chủ đề khác.

Các diễn giả trong Ngày Toán học Thế giới 2022. Ảnh: Viện Toán học.

* **Ngày hội Toán học mở với chủ đề "Toán học kết nối – Mathematics Unites"** đã được tổ chức tại Quy Nhơn (ngày 3/4/2022) và Huế (ngày 17/4/2022). Đây là hai sự kiện do Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán (Viện NCCCT) phối hợp với ĐH Quy Nhơn, Sở GDĐT Bình Định, ĐH Sư phạm – ĐH Huế, và Sở GDĐT Thừa Thiên Huế tổ chức. Ngày hội Toán học mở (Math Open Day) gồm các hoạt động chuyên môn và trải nghiệm được tổ chức song song. Đây là một chuỗi các hoạt động về Toán học và STEM nói chung, nhằm tạo cơ hội cho học sinh, sinh viên, giáo viên, phụ huynh, các nhà toán học, nhà giáo dục cùng nhau thưởng thức vẻ đẹp của Toán học, cùng trải nghiệm và giao lưu văn hóa Toán học từ những góc độ mới. Các hoạt động chính diễn ra tại Ngày hội Toán học mở là các bài giảng đại chúng, tọa đàm, đối thoại, và hoạt động sáng tạo vừa cuốn hút, vừa có tính thực tiễn và chuyên môn sâu.

PGS. Lê Minh Hà tại Ngày hội Toán học mở Quy Nhơn.
Ảnh: Viện NCCCT.

GS. Hồ Tú Bảo giảng bài tại Ngày hội Toán học mở Huế.
Ảnh: Viện NCCCT.

Hình ảnh hoạt động tại Ngày hội Toán học mở Huế.
Ảnh: Viện NCCCT.

Các chuyên gia tham gia giảng bài gồm có: GS. Hồ Tú Bảo (Phòng thí nghiệm Khoa học Dữ liệu, Viện NCCCT), TS. Hà Minh Hoàng (ĐH Phenikaa), PGS. Ngô Hoàng Long (ĐHSP HN), PGS. Phó Đức Tài (ĐHKHTN, ĐHQGHN). Trong khuôn khổ MOD Huế 2022, PGS. Lê Minh Hà (Viện NCCCT) và PGS. Phó Đức Tài cũng đã trình bày các bài giảng đại chúng tại Trường THPT Chuyên Quốc học Huế vào ngày 18-19/04/2022. Hai ngày hội toán học tại Quy Nhơn và Huế đã thu hút khoảng 2700 người đến tham dự và trải nghiệm toán học. (Thông tin từ Viện NCCCT)

THÔNG TIN TOÁN HỌC, Tập 26 Số 1 (2022)

Toán học thế kỷ hai mươi 1
Michael Atiyah
Lê Hồng Đăng dịch

Những người đẹp ngủ trong rừng khoa học 17
Dương Tú

Lý thuyết trò chơi tiến hóa: toán học trong quá trình tiến hóa và các hành vi tập thể 22
Hàn Thế Anh

Liên đoàn Toán học Quốc tế sau một thế kỷ 30
Carlos Kenig
Đoàn Trung Cường dịch

Tin tức hội viên và hoạt động toán học 38